Göttinger Klassiker der Strömungsmechanik Bd. 2
herausgegeben von Andreas Dillmann

Karl Wieghardt

Theoretische Strömungslehre





Universitätsverlag Göttingen

Karl Wieghardt

Theoretische Strömungslehre

erschienen als Band 2 in der Reihe „Göttinger Klassiker der Strömungsmechanik“
im Universitätsverlag Göttingen 2005

Karl Wieghardt

Theoretische Strömungslehre



Universitätsverlag Göttingen
2005

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Herausgeber der Reihe „Göttinger Klassiker der Strömungsmechanik“:
Prof. Dr. rer.nat. Dr.-Ing.habil. Andreas Dillmann
(Georg-August-Universität Göttingen und
Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt)

Schriftleitung der Reihe „Göttinger Klassiker der Strömungsmechanik“:
PD Dr. rer. nat. Martin Rein
(Georg-August-Universität Göttingen und
Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt)

Der vorliegende Band ist ein Nachdruck der 2., überarbeiteten und erweiterten Auflage (1974), Verlag: B.G. Teubner, Stuttgart 1974
Nachdruck mit freundlicher Genehmigung des Verlags.
Erstmals erschienen im Verlag B. G. Teubner Verlagsgesellschaft mbH, Stuttgart, 1965

Titelabbildung
Karl Wieghardt. Fotografie aus Privatbesitz

ISBN 3-938616-33-4

Karl Wieghardt 1913-1996

Karl Wieghardt wurde am 20. November 1913 als Sohn des ordentlichen Professors für reine Mathematik und graphische Statik an der Technischen Hochschule Wien geboren. Nachdem sein Vater 1920 einen Ruf an die Technische Hochschule Dresden angenommen hatte, verbrachte er seine Jugendjahre in Dresden, wo er nach dem Abitur auch Technische Physik und Maschinenbau studierte. Wieghardt studierte nach dem Vorexamen an der Universität Göttingen Technische Physik und schloß 1938 dieses Studium ab. Mit seiner Dissertation über die Auftriebsverteilung eines Rechteckflügels 1938 begann eine mehr als zehnjährige Tätigkeit als Schüler von Ludwig Prandtl am Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung in Göttingen. Besonders die theoretischen und experimentellen Grenzschichtforschungen von Prandtl haben Wieghardt zu eigenen Arbeiten angeregt, so daß dieser sich bereits 1945 mit einer Arbeit über laminare Grenzschichten habilitieren konnte. Später beschäftigte sich Wieghardt ganz besonders mit den turbulenten Grenzschichten. Von Professor Weinblum stammt die Bemerkung: „Dr. Wieghardt besitzt alle Vorzüge der Prandtlschen Schule, nämlich den Blick für das physikalisch-technisch Wesentliche, die Beherrschung des notwendigen mathematischen Handwerkzeuges und experimentelles Geschick".

Nach dem zweiten Weltkrieg versuchten die Siegermächte Rußland, Amerika und England durch Verpflichtung deutscher Wissenschaftler und Ingenieure die technologisch-wissenschaftlichen Ressourcen Deutschlands für sich zu gewinnen. In diesem Rahmen wurde Wieghardt an das Admiralty Research Laboratory in Teddington/England 1949 verpflichtet. Von dort holte Professor Weinblum Dr. Wieghardt an das Institut für Schiffbau der Universität Hamburg als wissenschaftlichen Assistenten. 1955 wurde Wieghardt zum außerordentlichen Professor für Strömungslehre ernannt.

Am Institut für Schiffbau hatte man neben dem Lehrstuhl für Schiffstheorie, den Professor Weinblum inne hatte, auch einen Lehrstuhl für Praktischen Schiffbau eingerichtet, den man 1960 Professor Wieghardt anbot. Das war insofern etwas ungewöhnlich, zumal mit Professor Lerbs als Direktor der Hamburgischen Schiffbau-Versuchsanstalt nunmehr gleich drei Hydrodynamiker tätig wurden. Damit drohte eine Zweiteilung der Abteilung Schiffstechnik Hannover/Hamburg in einen mehr ingenieurpraktischen Teil durch Professor Wendel und Hansen und einen mehr hydrodynamisch-theoretischen Teil.

Durch die gegenseitige Vertretung in Hannover beziehungsweise Hamburg hat sich dieses aber nicht nachteilig ausgewirkt. Professor Wieghardt hat in Hannover viele Jahre für Maschinenbauer die Strömungslehre gelesen sowie spezielle Probleme

der Strömungslehre in Hamburg. Sein Lehrbuch „Theoretische Strömungslehre“ ermöglichte jungen Hydrodynamikern einen hervorragenden Einstieg in die Materie.

Nach dem Krieg beschäftigte sich Wieghardt zunächst mit Strömungen in granulierten Medien, da die Lehre der Schiffsströmung eingeschränkt worden war. Später beschäftigte er sich dann aber wieder mit Grenzschichtfragen, besonders auch mit völligen Schiffen sowie mit den Fragen der Wechselwirkung zwischen Schiff und Propeller.

Viele Jahre hat Wieghardt grundlegende theoretische und experimentelle Beiträge zu der Umströmung von Schiffen geliefert und diese der Schiffbautechnischen Gesellschaft in mehreren Vorträgen präsentiert. Die Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik (GAMM) wählte ihn 1967 für drei Jahre zu ihrem Präsidenten. Seine Leistungen wurden durch die Nominierung als David Taylor Memorial Lecturer, als Vortragender der Ludwig Prandtl Gedächtnis-Vorlesung sowie durch die Verleihung der Würde eines Doktor-Ingenieur Ehren halber durch die Universität Stuttgart gewürdigt.

Karl Wieghardt, der sich noch viele Jahre nach seiner Emeritierung aktiv an der Weiterentwicklung der Strömungslehre beteiligte, ist am 26. November 1996 in Hamburg verstorben.

Eike Lehmann[1]

---

1 aus: E. Lehmann, 100 Jahre Schiffbautechnische Gesellschaft – Biografien zur Geschichte des Schiffbaus, S. 539, Berlin 1999

Vorwort

Die Strömungslehre wird in Deutschland wegen ihrer technischen Anwendungsmöglichkeiten zwar an allen Technischen Hochschulen gelehrt, aber nur an wenigen Universitäten. Das ist insofern verwunderlich, als es sich dabei um ein Teilgebiet der Mechanik und damit auch der Physik handelt, das sich auch in theoretischer Hinsicht lebhaft weiterentwickelt; besonders enge Verknüpfungen mit anderen physikalischen Disziplinen ergeben sich in modernen Spezialgebieten wie z. B. der Magnetohydrodynamik oder den Strömungen hochverdünnter Gase. Die vorliegende Einführung handelt nur von den bereits klassischen Grundlagen der Strömungslehre, die schon weitgehend mathematisiert sind, und wendet sich vor allem an Mathematiker, theoretisch interessierte Physiker und Ingenieure. Denn zumindest ein Hauptproblem – das der turbulenten Strömungen – ist in theoretischer Hinsicht wegen grundsätzlicher, mathematischer Schwierigkeiten noch weitgehend ungelöst.

Der Verfasser, der nicht Fachmathematiker, sondern Strömungsfachmann ist, muß allerdings den mathematischen Leser um ein gewisses Wohlwollen aus folgendem Grund bitten: Der Physiker erdenkt und beschreibt bekanntlich Modelle, die bei einem Minimum an Voraussetzungen das, was an gewissen realen Vorgängen meßbar ist, möglichst genau wiedergeben sollen. Dabei werden ausgiebig mathematische Methoden und Ergebnisse angewandt, weshalb der Mathematiker – mit vollem Recht – die ihm gewohnte Präzision der Schlußfolgerung auch bei diesen logischen Deduktionen erwartet, die jedoch der Physiker im Streben nach den ihn interessierenden Resultaten oft weniger beachtet. Was er dann für einen strengen Beweis hält, ist für den Mathematiker manchmal vielleicht nur eine heuristische Ideenskizze.

Herrn Prof. Dr. E. Becker, Darmstadt, ist der Verfasser besonders zu Dank verpflichtet, daß er das Manuskript eingehend durchgesehen und durch seine Kritik manche Verbesserung und viele Präzisierungen angeregt hat. Auch Herr Dr. E. Adams, Freiburg im Br., hat freundlicherweise anläßlich der Korrektur nützliche Hinweise gegeben.

Dem Herausgeber und dem Verlag gebührt ebenfalls Dank, und zwar vor allem für die – trotz der stark verzögerten Abgabe des Manuskripts – erwiesene Geduld.

Für die zweite Auflage wurden viele Druckfehler berichtigt. Vor allem aber wurden 28 Aufgaben mit Lösungen (leichte bis sehr schwierige) hinzugefügt, die einige der vielen Anwendungsmöglichkeiten der Strömungslehre andeuten sollen. Da im knappen Haupttext nur die wichtigsten Grundlagen mit der für den Studierenden nötigen Vollständigkeit dargestellt wurden, sind mehrere der Aufgaben weiterführende Ergänzungen. In den Aufgaben wurden die neuen SI-Einheiten benutzt.

Über die jeweils neueste Entwicklung der verschiedensten Teilgebiete der Strömungslehre berichten Übersichten für den Nicht-Spezialisten in der seit 1969 erscheinenden „Annual Review of Fluid Mechanics“, Palo Alto, California, herausgegeben von M. van Dyke, W. G. Vincenti und J. V. Wehausen. Der interessierte Leser sei deshalb an dieser Stelle darauf hingewiesen.

Hamburg, März 1974 K. Wieghardt

Inhalt

Anhang

Häufiger vorkommende Bezeichnungen

A Auftrieb
a Temperaturleitzahl
$\mathbf{b}$ Beschleunigungsvektor
c Schallgeschwindigkeit
c_a, c_w Auftriebs- und Widerstandsbeiwert
c_p, c_v spezifische Wärme bei konstantem Druck bzw. Volumen
D Dissipation
e innere Energie je Masseneinheit
$d\mathbf{F}$ Oberflächenelement mit Richtung der äußeren Normalen
Fr Froude-Zahl = Geschwindigkeit durch Wurzel aus Schwerebeschleunigung mal Länge
g Schwerebeschleunigung
$I = |\mathbf{I}|$ Impuls bzw. Impulsvektor
i Enthalpie oder Wärmeinhalt je Masseneinheit
$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ imaginäre Einheit
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ Einheitsvektoren in x, y, z-Richtung
$\mathbf{K}$ äußere Kraft je Raumeinheit
k Wellenzahl
l Mischungsweg
ln natürlicher Logarithmus
log Zehnerlogarithmus
Ma Mach-Zahl = Gasgeschwindigkeit durch Schallgeschwindigkeit
Pr Prandtl-Zahl = kinematische Zähigkeit durch Temperaturleitfähigkeit
p statischer Druck
p_d Dampfdruck
q Wärmemenge je Masseneinheit
R Gaskonstante
Re Reynolds-Zahl = Geschwindigkeit mal Länge durch kinematische Zähigkeit
$\mathbf{r}$ Radiusvektor
St Strouhal-Zahl = Zahl der Wirbel je Sekunde, die hinter einem Körper entstehen, mal Körperdurchmesser durch Anströmgeschwindigkeit
s Entropie je Masseneinheit
$d\mathbf{s}$ Wegelement als gerichtete Größe
T absolute Temperatur
t Zeit
U Anströmgeschwindigkeit
u, v, w Komponenten der Geschwindigkeit in x, y, z-Richtung
u', v', w' Komponenten einer Störgeschwindigkeit oder Geschwindigkeitsschwankung
u_* Schubspannungsgeschwindigkeit $= \sqrt{\tau_0/\varrho}$
$\mathbf{v}$ Geschwindigkeitsvektor
$\mathbf{v}'$ Vektor einer Geschwindigkeitsschwankung oder Störgeschwindigkeit
$\bar{\mathbf{v}}$ zeitliches Mittel des Geschwindigkeitsvektors
W Widerstand
$\mathbf{w}$ Wirbelvektor = rot $\mathbf{v}$
x, y, z rechtwinklige Koordinaten
z komplexe Zahl $= x + iy$
$\bar{z}$ konjugiert komplexe Zahl $= x - iy$

Γ Zirkulation
$\vec{\Gamma}$ Zirkulationsvektor
Δ Differenz oder auch Laplace-Operator
δ Grenzschichtdicke
ζ komplexe Zahl $= \xi + i\eta$
$\varkappa$ Verhältnis der spezifischen Wärmen $= c_p/c_v$ (z. B. Luft $\varkappa = 1{,}4$)
λ Wärmeleitfähigkeit
μ Zähigkeit
μ' Volumenviskosität
ν kinematische Zähigkeit $= \mu/\varrho$
ξ, η, ζ dimensionslose Koordinaten
ϱ Dichte
σ Kavitationszahl
τ Schubspannung, τ_0 Wandschubspannung
Φ Geschwindigkeitspotential
Ψ Stromfunktion

1. Verschiedene Kontinua

1.1. Einleitung

1.1.1. Eigenschaften von Flüssigkeiten und Gasen. Die Strömungslehre handelt von den Bewegungen der Flüssigkeiten und Gase und ist daher ein Teilgebiet der Mechanik, der ältesten und grundlegenden Disziplin der Physik. Da nun bei fast allen Vorgängen in Natur und Technik Flüssigkeiten oder Gase bewegt werden, sollte man in der Strömungslehre eine abgeschlossene, mathematisierte Wissenschaft erwarten. Das trifft jedoch für wichtige Teilgebiete noch gar nicht zu. So hat man z. B. für eine der einfachsten Strömungen, nämlich die in einem langen geraden Rohr wie in der Wasserleitung, keine strenge Theorie. Zwar findet man hierüber in jedem Ingenieurhandbuch ausreichend Zahlenangaben, z. B. über den Druckverlust; aber diese Zahlen sind nicht etwa Endergebnisse einer komplizierten Theorie, sondern lediglich ein Extrakt aus zahlreichen Messungen in entsprechenden Modellversuchen. Ähnlich werden auch heute noch vor dem Bau jedes größeren Schiffes viele Versuchsmessungen an einem oder mehreren, geometrisch ähnlichen Modellen durchgeführt, um den Widerstand des Schiffes zuverlässig voraussagen zu können. All dies ist um so verwunderlicher, wenn man etwa bedenkt, mit welcher Sicherheit zur gleichen Zeit die so komplizierte und abstrakte Relativitätstheorie praktisch in der Atombombe „angewandt“ wird. Andererseits besteht der große Reiz der Strömungslehre gerade darin, daß derart hausbackene Probleme noch auf eine theoretische Durchdringung warten.

Strömungsvorgänge darzustellen und zu begreifen, ist vor allem deshalb so schwierig, weil die einzelnen Flüssigkeitsteilchen sich leicht gegenseitig verschieben können. Bei der elastischen Deformation eines festen Körpers rufen selbst große äußere Kräfte nur kleine Verschiebungen der Körperteilchen hervor, und es bleiben ursprünglich benachbarte Teilchen auch weiterhin dicht benachbart. Bei einem plastischen Körper, z. B. bei Töpferton, kann bereits durch eine geringere Beanspruchung zumindest örtlich Gleiten und Fließen entstehen, also eine dauernde fortschreitende Formänderung, die nicht mehr durch die gegenseitige Verschiebung der Teilchen, sondern durch ihre Formänderungsgeschwindigkeit zu beschreiben ist. Um in einer Flüssigkeit die ursprüngliche Anordnung der Teilchen völlig zu verändern, genügen dagegen beliebig kleine Kräfte und Arbeitsleistungen, wenn die Formänderung nur hinreichend langsam erfolgt; es gibt hier auch keine physikalisch ausgezeichnete Anfangsordnung der Teilchen wie beim festen Körper. Wesentlich ist jedoch die Geschwindigkeit, mit der eine solche Formänderung im Innern der Flüssigkeit vorgenommen wird. Bei Bewegungen in allen wirklichen Flüssigkeiten und Gasen stellt man nämlich eine innere Reibung fest, die um so größer ist, je schneller Flüssigkeitsschichten aneinander vorbei gleiten. Diese Eigenschaft nennt man Zähigkeit. Offenbar schränkt sie die Beweglichkeit der Flüssigkeitsteilchen etwas ein; bei unendlich

großer Zähigkeit könnte man ja überhaupt keine Bewegung erzwingen, ebenso wie bei einem starren Körper. Der andere Extremfall: Zähigkeit gleich Null, entspricht dem Maximum an Beweglichkeit der Teilchen und damit dem Superlativ von flüssig im Gegensatz zu fest; ein solches Medium nennt man deshalb ideale Flüssigkeit.

Diese reibungslose Flüssigkeit ist auch in dem Sinne ideal, als in ihr keine Energie mechanisch verloren gehen kann, während in wirklichen Flüssigkeiten durch die Reibungskräfte mechanische Energie in Wärme umgewandelt, oder dissipiert, wird. Die ideale Flüssigkeit übt selbst gegen schnelle Formänderungen keinen Widerstand aus, andere Flüssigkeiten nur dann, wenn die Formänderung hinreichend langsam erfolgt.

Zwei andere, mechanisch wichtige Größen sind die Dichte (Masse der Volumeneinheit) und die Kompressibilität (Zusammendrückbarkeit). Flüssigkeiten kann man selbst durch sehr große Kräfte nur so wenig zusammendrücken, daß man sie gewöhnlich als inkompressibel ansehen kann; ihre Dichte ist dann räumlich und zeitlich konstant, was übrigens auch für die ideale Flüssigkeit vorausgesetzt wird. Gase kann man dagegen schon mit viel kleineren Drücken verdichten. Trotzdem darf man überraschend oft auch für Strömungen in einem Gas dieses näherungsweise als inkompressibel betrachten; nämlich immer dann, wenn im Strömungsgebiet nur kleine Druckänderungen auftreten. In diesem Sinne große Druckänderungen ergeben sich nun einerseits bei hohen Geschwindigkeiten (von der Größenordnung der Schallgeschwindigkeit), andererseits bei großräumigen Strömungen mit großen Höhenunterschieden. Mit solchen Strömungen befassen sich die Gasdynamik bzw. die dynamische Meteorologie; in beiden Gebieten ist die Thermodynamik wesentliche Hilfswissenschaft.

Im Gegensatz zu festen Körpern können nicht nur Gase, sondern auch Flüssigkeiten gewöhnlich nur kleinen Zugspannungen widerstehen; sinkt der Absolutdruck, z. B. in einer Wasserströmung, örtlich unter den Dampfdruck, so entsteht dort ein mit Dampf gefüllter Hohlraum (Kavitation).

Eine Gruppe von Strömungserscheinungen, die nicht in Gasen, sondern nur in Flüssigkeiten auftreten können, rührt daher, daß nur in einer Flüssigkeit freie Oberflächen möglich sind; hierzu gehören z. B. Oberflächenwellen, also auch der Wellenwiderstand eines Schiffes, Tropfenbildung, Kavitation. Bei kleinen Abmessungen (Kapillarwellen, Tropfen) spielt dabei die Oberflächenspannung an freien Oberflächen eine Rolle, die auf eine Verkleinerung der Oberfläche hinzielt, als ob diese aus einer gespannten, dünnen Haut bestünde.

Das ist freilich nur eine Umschreibung der Makrowirkung komplizierter, molekulartheoretischer Vorgänge an der Oberfläche einer Flüssigkeit, ebenso wie wir hier die Zähigkeit der Flüssigkeiten oder Gase als einen experimentellen Befund hinnehmen, ohne ihn theoretisch zu begründen. Denn in der Strömungslehre beschränkt man sich darauf, die Flüssigkeit oder das Gas zu einem Kontinuum zu idealisieren, dem möglichst wenige, einfache Eigenschaften zugeschrieben werden. So wurde z. B. in der Tragflügeltheorie für Flugzeuge die Luft zunächst als ideale Flüssigkeit dargestellt; zur Verfeinerung der Theorie mußte dann teilweise auch die Zähigkeit der Luft berücksichtigt werden und schließlich, für schnelle Unter- und Überschallflugzeuge, vor allem die Kompressibilität. Die Darstellung der Luft als Kontinuum versagt offenbar erst dann, wenn die freie

Weglänge der Luftmoleküle nicht mehr klein ist gegen die Körperabmessungen, wie z. B. beim Raketenflug in der hohen Atmosphäre.

In dieser phänomenologischen Aufzählung der wichtigsten mechanischen Eigenschaften eines Strömungsmediums muß noch erwähnt werden, daß alle wirklichen Flüssigkeiten und Gase an festen Wänden haften, wenigstens solange sie als Kontinuum aufgefaßt werden können. Das heißt, die Flüssigkeits- oder Gasteilchen in unmittelbarer Nähe eines festen Körpers machen dessen Bewegung stets vollkommen mit, ohne etwa längs seiner Oberfläche vorbeizugleiten. In der Theorie der idealen, reibungslosen Flüssigkeit kann man diese Randbedingung nicht erfüllen, sondern nur die rein kinematische, triviale, daß die zum Körper senkrechte Komponente der Relativgeschwindigkeit an der Wand verschwindet, d. h. daß keine Flüssigkeit in den Körper hineinfließt. L. Prandtl (1875–1953) erkannte die grundlegende Bedeutung der Haftbedingung und stellte 1904 seine Grenzschichttheorie auf. Mit ihrer Hilfe können viele Diskrepanzen zwischen Ergebnissen der Theorie idealer Flüssigkeiten und beobachteten Strömungen in Flüssigkeiten sehr kleiner Zähigkeit erklärt werden; außerdem zeigt sie einen Weg, wie die sonst meist unüberwindlichen mathematischen Schwierigkeiten der Theorie zäher Flüssigkeiten verringert werden können.

Zur Beschreibung und Deutung von Strömungen in den technisch wichtigsten Medien, Luft und Wasser (Aero- und Hydrodynamik), reichen bereits die erwähnten mechanischen Eigenschaften aus. Außerdem gibt es noch eine Vielzahl anderer nicht-fester Stoffe, die sich mechanisch ganz anders verhalten. So genügt z. B. für viele Kolloide ein einfacher Ansatz von Newton (vgl. 1.4.3) zur Beschreibung der Zähigkeit nicht mehr; man spricht dann von Nicht-Newtonschen Flüssigkeiten. Andererseits ist es ein Merkmal plastischer Stoffe, wie z. B. von Tonen, Pasten und Teigen, daß sie sich bei kleinen Beanspruchungen elastisch deformieren und überhaupt erst dann bzw. dort anfangen zu fließen, wo die Schubspannung einen gewissen Mindestwert (Fließgrenze) überschreitet. Das anomale Fließen solcher Stoffe ist das Thema der Rheologie oder Fließkunde.

1.1.2. Flüssigkeitsspannungen. Zur Darstellung von Bewegungen und Kräften im Innern einer Flüssigkeit muß man diese in Einzelbereiche aufteilen. Solange man die Flüssigkeit als Kontinuum auffassen kann, ist es bequem, diese Teilbereiche so klein anzunehmen, daß in ihnen mindestens die Änderungen zweiter Ordnung von Größen wie Geschwindigkeiten oder Kräften innerhalb einer gewissen Genauigkeitsgrenze vernachlässigt werden können. Auf ein solches Flüssigkeitsteilchen wirken nun Volumen- und Oberflächenkräfte. An der Masse des Teilchens, die seinem Volumen proportional ist, greifen zunächst äußere Kräfte, wie z. B. die Schwerkraft, an. Dazu kommen die Kräfte, die die benachbarten Teilchen ausüben, also die sogenannten inneren Kräfte. Wir nehmen an oder übernehmen als Ergebnis der Molekulartheorie, daß die Moleküle keine Fernkräfte ausüben, sondern nur auf molekulare Abstände hin wirken. Denken wir uns zu einem bestimmten Zeitpunkt die Flüssigkeit durch irgendeine Trennfläche getrennt, so üben nur die unmittelbar benachbarten Moleküle auf beiden Seiten der Trennfläche gegenseitig gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte aufeinander aus. Bei kleinen Trennflächen, z. B. an den Grenzflächen des oben beschriebenen Flüssigkeitteilchens, wird der Mittelwert dieser Kräfte proportional der jeweiligen Fläche. Deshalb ist es sinnvoll, diese Kräfte auf

die zugehörige Fläche zu beziehen und den Quotienten als Flüssigkeitsspannung zu definieren mit der Dimension Kraft durch Fläche, also z. B. kp/m². Die mittlere Spannung auf eine Fläche kann man nun in eine Normalspannung senkrecht zur Grenzfläche und in eine Tangential- oder Schubspannung in der Fläche zerlegen. Normalspannungen werden gewöhnlich in Richtung der äußeren Normale als positiv definiert, z. B. bei Zugbeanspruchung in der Elastizitätstheorie. Der ins Innere des Teilchens gerichtete Flüssigkeitsdruck ist dann eine negative Normalspannung.

In einem Gas beeinflussen sich die Moleküle – nach der kinetischen Gastheorie – überhaupt nur beim Zusammenstoß. Die obigen Spannungen werden hier allein aus dem statistischen Mittel des Impulsstromes durch ein Flächenelement infolge der thermischen Molekularbewegung erklärt. Insbesondere kann der in 1.4.3 phänomenologisch eingeführte Zähigkeitsansatz auf diese Weise für Gase begründet werden.

Der Spannungszustand in einer ruhenden Flüssigkeit ist besonders einfach, weil man als Flüssigkeit ein deformierbares Medium definiert, bei dem im Ruhezustand keine Reibungskräfte, also auch keine Schubspannungen vorhanden sind. Wie auch immer in der ruhenden Flüssigkeit eine Trennfläche gedacht wird, stets wirkt auf ihr nur eine Normalspannung oder ein Druck. Betrachten wir speziell ein kleines Prisma mit der Höhe Δz wie in Fig. 1, auf dessen Seitenflächen die Drucke σ_x (in x-Richtung), σ_y und σ_α bzw. die Kräfte $\sigma_x\ \Delta y\ \Delta z$ usw. wirken. Die äußeren Volumenkräfte, z. B. das Gewicht dieses Flüssigkeitsteilchens $1/2 \cdot \varrho\, g\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$ mit $\varrho =$ örtliche Flüssigkeitsdichte und $g =$ Erdbeschleunigung, sind für verschwindende Δx, Δy und Δz um eine Größenordnung kleiner als die Oberflächenkräfte. Daher müssen schon die letzteren im Gleichgewicht untereinander stehen; d. h. die Kräfte $\sigma_x\ \Delta y\ \Delta z$ usw. müssen vektoriell addiert ein geschlossenes Dreieck wie in Fig. 1 bilden. Dieses Kräftedreieck ist offensichtlich ähnlich dem Prismenquerschnitt, die Kräfte sind also proportional der Fläche, auf die sie wirken; das heißt aber, die Drucke in den drei Richtungen σ_x, σ_y und σ_α sind alle gleich groß. In einem Punkt einer ruhenden Flüssigkeit ist demnach der Druck nach jeder Richtung hin gleich groß; der Spannungszustand ist durch eine einzige skalare (richtungsunabhängige) Größe, nämlich den örtlichen Druck p, bereits völlig bestimmt.

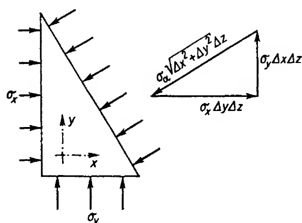


Fig. 1. Normaldrucke an einem Prisma und Kräftedreieck

In einer reibungslosen Flüssigkeit, die auch kompressibel sein kann, entstehen selbst in einer Strömung keine Schubspannungen, und die obigen Überlegungen bleiben hier weiterhin gültig. Denn auch die Trägheitskraft, das negative Produkt von Masse mal Beschleunigung des Teilchens nach Fig. 1, verschwindet in erster Ordnung gegenüber den Oberflächenkräften ebenso wie die Schwerkraft im Grenzfall. In einer reibungslosen Flüssigkeit ist also nicht nur im Ruhe-

zustand, sondern ganz allgemein der Druck in jedem Punkt nach allen Richtungen hin gleich groß; allerdings kann der Druck p hier nicht nur vom Ort, sondern eventuell auch noch von der Zeit abhängen: $p\,(x, y, z, t)$. In der Strömung einer zähen Flüssigkeit dagegen entstehen Schubspannungen, und der Spannungszustand an einem Punkt wird erst durch sechs Größen festgelegt, wie später gezeigt wird. Die Dynamik der zähen Flüssigkeit – selbst der inkompressiblen – ist deshalb weitaus komplizierter als die der reibungslosen Flüssigkeit, obwohl nur eine einzige, weitere Materialkonstante, die Zähigkeit, dazukommt.

1.2. Statik

1.2.1. Druck in einer ruhenden Flüssigkeit. Die Ortsabhängigkeit des Druckes in einer schweren, ruhenden Flüssigkeit studieren wir an dem in Fig. 2 gezeichneten Teilchen, einem Quader mit den Seitenlängen dx, dy und dz. Wir wissen bereits,

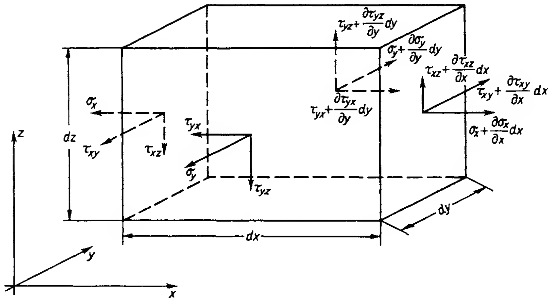


Fig. 2. Spannungen am Volumenelement

daß nur Normalspannungen möglich sind und daß diese an einem Punkt in allen Richtungen gleich groß sind: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$; an äußeren Kräften wirke nur die Schwerkraft entgegen der z-Richtung nach unten. Das Kräftegleichgewicht in den drei Koordinatenrichtungen erfordert

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{1.2}$$

und
$$\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}\,dz \cdot dx\,dy - \varrho g\,dx\,dy\,dz = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\varrho g. \tag{1.3}$$

Es wird also $p = p(z) = p_0 - \int_0^z \varrho g \, \mathrm{d}z$, mit $p_0 = p(z = 0)$.

In einer inkompressiblen Flüssigkeit mit konstanter Dichte ϱ und spezifischem Gewicht $\gamma = \varrho g$ wird insbesondere

$$p = p_0 - \gamma z \,. \tag{1.4}$$

Die einseitig nach unten gerichtete Schwerkraft verursacht einen allseitigen, richtungslosen Druck, der in waagerechten Ebenen konstant ist und nach unten hin linear zunimmt.

Die Gleichungen (1.1) bis (1.3) legen eine Verallgemeinerung für andere äußere Volumenkräfte als die Schwerkraft nahe, nämlich $\operatorname{grad} p = \boldsymbol{K} =$ äußere Kraft je Raumeinheit.

Das bedeutet aber auch: Gleichgewicht in einer ruhenden Flüssigkeit ist nur dann möglich, wenn die äußeren Kräfte als Gradient einer skalaren Funktion darstellbar sind, also ein Potential haben. Nennen wir dieses Kräftepotential U, so wird

$$\boldsymbol{K} = \operatorname{grad} U = \operatorname{grad} p \quad \text{und} \quad U - p = \text{const.} \tag{1.5}$$

Da der Druck eine eindeutige Ortsfunktion ist, muß es auch das Kräftepotential sein, wenn Gleichgewicht möglich sein soll.

1.2.2. Druck in einer rotierenden Flüssigkeit. In einer (inkompressiblen) Flüssigkeit, die um eine vertikale Achse gleichförmig rotiert, wirkt außer der Schwerkraft nach unten noch eine horizontale Zentrifugalkraft $\varrho r \omega^2$, mit $r =$ Achsabstand und $\omega =$ Winkelgeschwindigkeit der Flüssigkeit. Gl. (1.5) lautet daher hierfür

$$\operatorname{grad} p = \boldsymbol{K} = -\boldsymbol{k} \varrho g + \boldsymbol{i} \varrho r \omega^2 \,, \tag{1.6}$$

wobei $\boldsymbol{i}$ den Einheitsvektor in radialer Richtung und $\boldsymbol{k}$ den in z-Richtung nach oben bedeuten. Das Kräftepotential folgt daraus durch Integration

$$\begin{aligned} U &= \int \boldsymbol{K}(\boldsymbol{i}\,\mathrm{d}r + \boldsymbol{k}\,\mathrm{d}z) \\ &= -\varrho g z + \frac{\varrho}{2} r^2 \omega^2 + \text{const} = p + \text{const.} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Auf der Oberfläche muß der Druck p_0 konstant sein, etwa gleich dem Barometerdruck. Die Gleichung der Oberfläche lautet deshalb

$$z = \frac{r^2 \omega^2}{2g} + \text{const} \,. \tag{1.8}$$

Die Oberfläche und alle anderen Flächen konstanten Drucks haben die Form des gleichen Rotationsparaboloids.

1.2.3. Druckverteilungen in der Atmosphäre. In der unteren Atmosphäre, der Troposphäre, die am Äquator bis zu einer Höhe z von rd. 14 km und an den

Polen etwa bis 7 km hoch reicht, beobachtet man folgenden mittleren Zusammenhang zwischen Luftdruck p und Luftdichte ϱ:

$$p\varrho^{-n} = \text{const} = p_0\varrho_0^{-n} \quad \text{(polytrope Atmosphäre)} \tag{1.9}$$

mit $n \approx 1{,}2$. (Der Index 0 bezieht sich auf Werte in einer beliebigen Höhe $z = z_0$).

Außerdem gilt noch die allgemeine Gasgleichung

$$\frac{p}{\varrho} = RT \tag{1.10}$$

mit $R = 288\,\text{m}^2/\text{s}^2\,°\text{C}$ für mittelfeuchte Luft und T = absolute Temperatur. Aus Gl. (1.9) und (1.10) folgt zunächst für die Temperatur

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{(n-1)/n}$$

oder
$$\mathrm{d}p = \frac{n}{n-1}\,\frac{p_0}{T_0}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{1/(n-1)}\mathrm{d}T.$$

Zusammen mit der statischen Druckgleichung (1.3) wird demnach

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\varrho g = -\frac{pg}{RT} = -\varrho_0 g\left(\frac{T}{T_0}\right)^{1/(n-1)} = \frac{n}{n-1}\,\frac{p_0}{T_0}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{1/(n-1)}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}$$

oder
$$T - T_0 = -\frac{g}{R}\,\frac{n-1}{n}\,(z - z_0) \tag{1.11}$$

und
$$\frac{p}{p_0} = \left[1 - \frac{n-1}{n}\,\frac{\varrho_0 g}{p_0}\,(z - z_0)\right]^{n/(n-1)}. \tag{1.12}$$

Danach fällt die Temperatur linear nach oben hin ab, und zwar für $n = 1{,}2$ um rd. 0,6 °C je 100 m Höhendifferenz und für eine adiabatische Luftschichtung mit $n = \varkappa$ = Verhältnis der spezifischen Wärmen = 1,4 um rd. 1 °C/100 m.

Bei kleinen Höhenunterschieden genügt es also, isotherm zu rechnen. Man erhält dann aus Gl. (1.10) mit $T = \text{const}$, $p/\varrho = p_0/\varrho_0$ und aus Gl. (1.3)

$$\frac{p}{p_0} = \exp\left(-\frac{\varrho_0 g}{p_0}\,(z - z_0)\right) \tag{1.13}$$

oder
$$z - z_0 = \frac{p_0}{\varrho_0 g}\ln\left(\frac{p_0}{p}\right) \quad \text{(barometrische Höhenformel).} \tag{1.14}$$

Mit Gl. (1.10) folgt daraus z. B. für $T = 273$ K eine Druck- und Dichteabnahme um 1% bei einer Höhenvergrößerung um 80 m.

Meteorologisch wichtig ist nun die Frage, welche dieser möglichen und auch vorkommenden Luftschichtungen stabil sind. Wenn – etwa durch eine plötzliche Bö – ein Luftvolumen nach oben gehoben wird, und es ist bei dem dort herrschenden Druck gerade so dicht und schwer wie seine neue Umgebung, so wird es dort bleiben; d. h. die Schichtung ist in diesem Fall im indifferenten Gleichgewicht, ebenso wie die Teile einer ruhenden, inkompressiblen Flüssigkeit. Da

bei einem solchen schnellen Transport ohne Wärmeaustausch die Luft adiabatisch expandiert, entspricht die adiabatische Schichtung mit $n = \varkappa = 1{,}4$ (für trockene Luft, bzw. $n \approx 1{,}2$ für mittelfeuchte Luft) diesem indifferenten Gleichgewicht; in jeder Höhe nimmt dann ein fremdes Luftvolumen automatisch die gleiche Temperatur an wie seine neue Umgebung. Stabil sind nun Schichtungen mit $n < 1{,}4$ (bzw. 1,2), weil dann ein angehobenes Luftvolumen oben kälter und schwerer ist als die neue Umgebung, so daß es wieder herunter sinkt. Insbesondere ist die isotherme Atmosphäre stabil oder gar Schichtungen mit Temperaturzunahme nach oben (Inversion mit $n < 1$).

1.2.4. Druck in einem Getreidesilo. Eine völlig anders geartete Druckverteilung als in einem Kontinuum stellt sich in kohäsionslosen, körnigen Massen wie Getreide oder Sand ein. Obwohl z. B. das Fließen des Sandes in einer Sanduhr an eine Flüssigkeit erinnert, ist hier schon die Statik viel komplizierter als etwa in Wasser. Denn zwischen den einzelnen Körnern tritt, wie bei allen festen Körpern, schon im Ruhezustand Reibung auf, und dem durch die Schwerkraft verursachten vertikalen Druck p_{v} entspricht hier nur ein kleinerer horizontaler Druck p_{h}, nämlich

$$p_{\mathrm{h}} = k_{\mathrm{a}} p_{\mathrm{v}}$$

mit k_{a} = Koeffizient des aktiven Erddrucks, z. B. $k_{\mathrm{a}} = 1/4$. Reibung der Ruhe oder Haftreibung entsteht natürlich auch zwischen dem Getreide und den Gefäßwänden; die Wandschubspannung an einer senkrechten Wand wird proportional dem Anpressungsdruck, also

$$\tau_0 = \mu_0 p_{\mathrm{h}}$$

mit μ_0 = Reibungszahl (von der Größenordnung 1). Nehmen wir an, daß in einem zylindrischen Silo (Durchmesser d) die Drucke im Getreide näherungsweise unabhängig sind von der radialen Koordinate, so wird die Gleichgewichtsbedingung für einen zylindrischen Körper mit der Höhe dz und dem Durchmesser d

$$-\frac{\pi}{4} d^2 \frac{\partial p_{\mathrm{v}}}{\partial z} \mathrm{d}z = \varrho g \frac{\pi}{4} d^2 \mathrm{d}z - \pi d \tau_0 \mathrm{d}z = \varrho g \frac{\pi}{4} d^2 \mathrm{d}z - \pi d \mu_0 k_{\mathrm{a}} p_{\mathrm{v}} \mathrm{d}z\,,$$

oder

$$p_{\mathrm{v}} = \frac{\varrho g d}{4 \mu_0 k_{\mathrm{a}}} \left[1 - \exp\left(4 \mu_0 k_{\mathrm{a}} \frac{z}{d}\right)\right]. \tag{1.15}$$

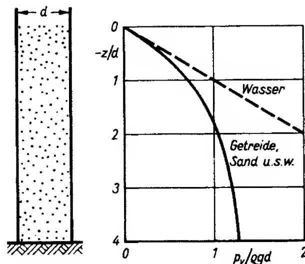


Fig. 3. Vertikaldruck in einem Silo

Dabei ist die Integrationskonstante bereits so gewählt, daß an der Oberfläche für $z = 0$ auch $p_{\mathrm{v}} = 0$ gilt (vgl. Fig. 3). Nur für sehr kleine Tiefen $z/d \approx 0$ wird hier wie in einer schweren Flüssigkeit

$$p_{\mathrm{v}} \approx -\varrho g z\,.$$

Wenn jedoch in das Füllmaterial Vibrationen eingeleitet worden sind, kann die Wandschubspannung τ_0 statt nach oben auch nach unten wirken, und aus μ_0 wird $-\mu_0$ in Gl. (1.15). Der Bodendruck steigt dann oft auf ein Mehrfaches von $-\varrho g z$.

1.3. Kinematik

1.3.1. Flüssigkeits- und Raumkoordinaten. Um die dynamischen Grundgleichungen für den Massenpunkt auf Flüssigkeitsströmungen zu übertragen, erscheint es zweckmäßig, jedes Flüssigkeitsteilchen durch Koordinaten zu markieren und dessen Bahnlinie in Raum und Zeit zu verfolgen. Diese Methode, eine Strömung zu beschreiben, nennt man nach Lagrange (1736–1813), wenngleich Euler (1707–1783) sie auch schon gekannt hat. Abgesehen von wenigen Ausnahmefällen (wie z. B. der turbulenten Diffusion), interessiert aber praktisch gar nicht das Schicksal der einzelnen Flüssigkeitsteilchen, sondern vielmehr der Strömungszustand am jeweils festgehaltenen Ort zu verschiedenen Zeiten. Diese sog. Eulersche Betrachtungsweise ist vor allem dann einfacher und anschaulicher, wenn die Strömung, von einem bestimmten, raumfesten Koordinatensystem aus gesehen, zeitlich gleichbleibend oder „stationär" ist.

Der Unterschied beider Beschreibungsmethoden sei an der Strömung eines Flusses über ein Wehr verdeutlicht. Ein treibendes Faltboot nimmt an der Bewegung eines Wasserteilchens an der Oberfläche teil; ein darin sitzender Beobachter erlebt also nach der Lagrangeschen Methode das Schicksal dieses Teilchens, dessen Geschwindigkeit und Beschleunigung offenbar zeitlich stark veränderlich ist. Ein am Ufer sitzender Angler denkt dagegen in raumfesten Euler-Koordinaten und nennt die Strömung stationär, da er zu jeder Zeit an denselben Stellen die gleichen Geschwindigkeiten und sonstigen Strömungsmerkmale vorfindet, wenn auch an immer neuen Wasserteilchen; für ihn wird die Strömung erst dann instationär, wenn sich – etwa bei Hochwasser – der Wasserspiegel ändert.

Der Einfachheit halber wird man natürlich solche Euler-Koordinaten benutzen, in denen die jeweilige Strömung stationär ist, falls es ein solches System überhaupt gibt. So ist z. B. das Wellenbild eines Schiffes, das mit gleichmäßiger Geschwindigkeit fährt, im raumfesten System eines Beobachters am Ufer instationär, dagegen im schiffsfesten System eines Passagiers stationär.

Ist eine Strömung in einem Euler-System kinematisch bekannt, so kann man natürlich auch die Bahnlinien jedes Flüssigkeitsteilchens durch Integration ermitteln. Das momentane Strömungsbild kann man aber anschaulicher durch sogenannte Stromlinien darstellen, deren Linienelement $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ überall der momentanen, örtlichen Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}\,(x, y, z, t)$ gleichgerichtet ist:

$$\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0\,,$$

oder in Komponenten, mit $\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{i}\mathrm{d}x + \boldsymbol{j}\mathrm{d}y + \boldsymbol{k}\mathrm{d}z$ und $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\,u + \boldsymbol{j}v + \boldsymbol{k}w$:

$$-w\mathrm{d}y + v\mathrm{d}z = 0, \quad -u\mathrm{d}z + w\mathrm{d}x = 0, \quad -v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y = 0,$$

$$\text{oder} \quad \mathrm{d}x : \mathrm{d}y : \mathrm{d}z = u : v : w\,. \tag{1.16}$$

Nur in stationärer Strömung sind Bahn- und Stromlinien gleich, denn nur dann bewegen sich die Teilchen auf den zeitlich gleichbleibenden Stromlinien wie auf festen Gleisen weiter. Bahnlinien kann man im Versuch sichtbar machen durch Markieren (z. B. Färben) einzelner Teilchen; eine Aufnahme einer solchen Strömung mit kurzer Belichtungszeit gibt dann das momentane Richtungsfeld der Stromlinien.

Die Rauchfahne eines Schornsteins zeigt schließlich eine dritte komplizierte Linie, nämlich eine Streichlinie; das ist der geometrische Ort aller Teilchen, die irgendwann einmal ein und dieselbe Stelle im Raum passiert haben. Wieder fallen nur in stationärer Strömung Streich-, Bahn- und Stromlinien zusammen.

Wenn wir auch im Folgenden die, vom Standpunkt der Punktmechanik natürlichen, Flüssigkeitskoordinaten nach Lagrange nie benutzen werden, so brauchen wir doch zur Aufstellung der dynamischen Grundgleichungen die Beschleunigung eines Masseteilchens, also die zeitliche Änderung seiner Geschwindigkeit, und müssen diese im raumfesten Euler-System ausdrücken können. Allgemein kann sich nun jedes Merkmal eines bestimmten Flüssigkeitsteilchens, z. B. seine Temperatur T, im Lauf der Zeit sowohl dadurch ändern, daß sich in seiner augenblicklichen Umgebung T ändert, als auch dadurch, daß es in ein Gebiet anderer Temperatur hineinwandert; die substantielle Änderung ist also gleich der lokalen plus der konvektiven Änderung. Lassen wir nun in einem Eulerschen Koordinatensystem die Teilchen an uns vorüberströmen, so ändert sich T für ein Teilchen, das sich zur Zeit t am Ort x, y, z befindet, mit der Zeit t wie

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,.$$

Für das Teilchen, das zur Zeit t gerade die Stelle x, y, z passiert, wird speziell $u = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, $v = \mathrm{d}y/dt$ und $w = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$. Seine Temperatur ändert sich also wie

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot \operatorname{grad} T\,. \tag{1.17}$$

Um die substantielle Differentiation nach der Zeit besonders zu kennzeichnen, schreibt man hierfür oft $\mathrm{D}/\mathrm{D}t$ statt $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$.

Komplizierter wird aber der Ausdruck für die substantielle Änderung einer Vektorgröße wie z. B. der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$. Zunächst erhält man etwa für die Komponente u wieder

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\,. \tag{1.18}$$

Diese Gleichung und die entsprechenden für v und w kann man folgendermaßen in eine Gleichung für den substantiellen Beschleunigungsvektor $\boldsymbol{b}$ zusammenfassen:

$$\boldsymbol{b} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\operatorname{grad})\,\boldsymbol{v}. \tag{1.19}$$

Dabei ist der Vektorgradient – das letzte Glied – die konvektive Beschleunigung eines Teilchens. Allgemein bedeutet $(\boldsymbol{B}\operatorname{grad})\,\boldsymbol{A}$ die Änderung von $\boldsymbol{A}$ in der Richtung von $\boldsymbol{B}$, multipliziert mit dem Betrag von $\boldsymbol{B}$. Hier, mit $\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{B} = \boldsymbol{v}$ gilt nun:

$$\boldsymbol{b} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{grad}\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} - \boldsymbol{v}\times \operatorname{rot}\boldsymbol{v}. \tag{1.20}$$

Denn es bedeuten, z. B. in cartesischen Koordinaten ausgeschrieben,

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

und
$$\operatorname{grad} \frac{\boldsymbol{v}^2}{2} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}\right).$$

Daher wird z. B. die Komponente von $\boldsymbol{b}$ in x-Richtung

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \left[v\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) - w\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \text{q.e.d.}$$

Daß die substantielle Beschleunigung in so komplizierter Form vom Geschwindigkeitsfeld und dessen räumlichen Ableitungen abhängt, – und zwar auch bei stationärer Strömung –, begründet die mathematische Hauptschwierigkeit der Strömungslehre: die Grundgleichungen sind – im Gegensatz etwa zu denen der Elektrodynamik – hier nicht linear.

1.3.2. Kontinuitätsgleichung und Stromfunktion. Die kinematisch allgemeinste Beziehung für das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung, gleichgültig ob in einem Edelgas oder in Zahnpasta, folgt aus der Erhaltung der Masse: In einem beliebig abgegrenzten, raumfesten Volumen V muß die zeitliche Abnahme der darin enthaltenen Masse gleich der Differenz zwischen aus- und einströmender Masse sein. Diese Differenz gibt das Oberflächenintegral $\oint \varrho \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{F}$, wo $d\boldsymbol{F}$ das Oberflächenelement des Volumens mit der Richtung der äußeren Normale bezeichnet, ϱ die Dichte und $\boldsymbol{v}$ die Geschwindigkeit. In einem Kontinuum können wir den Gaußschen Satz anwenden und mit ihm diesen Massenausfluß in ein Volumenintegral transformieren

$$\oint \varrho \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{F} = \int\limits_V \operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{v})\, dV = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial \varrho u}{\partial x} + \frac{\partial \varrho v}{\partial y} + \frac{\partial \varrho w}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz. \qquad (1.21)$$

Dieses soll nun entgegengesetzt gleich sein der zeitlichen Zunahme der Masse in dem betrachteten raumfesten Volumen

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \varrho\, dV = -\int\limits_V \frac{\partial \varrho}{\partial t}\, dV,$$

so daß ingesamt wird:

$$\int\limits_V \left[\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{v})\right] dV = 0. \qquad (1.22)$$

Abgesehen von singulären Stellen, wo im mathematischen Bild oder in der wirklichen Strömung Quellen oder Senken vorhanden sind, muß diese Beziehung

im Innern der Flüssigkeit für jedes Volumen gelten, also auch für ein infinitesimal kleines Element. Deshalb muß bereits der Integrand selbst verschwinden:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{v}) = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\varrho u + \frac{\partial}{\partial y}\varrho v + \frac{\partial}{\partial z}\varrho w = 0. \qquad (1.23)$$

Natürlich kann man diese Kontinuitätsgleichung auch direkt an einem Volumenelement ablesen, etwa wie in Fig. 2, S. 15, wenn man dort statt der Spannungen σ_x, σ_y, σ_z den Massenfluß in x, y, z-Richtung: ϱu, ϱv, ϱw betrachtet.

Der eben benutzte Gaußsche Satz erscheint hier, auf den Massenfluß $\varrho \boldsymbol{v}$ einer Strömung angewandt, physikalisch fast als selbstversändlich. Es gilt aber auch allgemein

$$\int \operatorname{div} \boldsymbol{A} \, \mathrm{d}V = \oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{F} \qquad (1.24)$$

für jedes stetige und differenzierbare Vektorfeld mit $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}\,A_x + \boldsymbol{j}\,A_y + \boldsymbol{k}\,A_z$.

Integriert man nämlich z. B. das erste Glied von div $\boldsymbol{A}$ partiell nach x, so wird

$$\iiint \frac{\partial A_x}{\partial x} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = \iint [(A_x)_\mathrm{r} - (A_x)_\mathrm{l}] \mathrm{d}y \mathrm{d}z \,,$$

wobei $(A_x)_\mathrm{r}$ und $(A_x)_\mathrm{l}$ die Endwerte von A_x am rechten und linken Ende des zur x-Achse parallelen Prisma mit dem Querschnitt $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ bedeuten. Dieses Prisma schneidet aus der Begrenzungsfläche das Stück $\mathrm{d}F$ aus, dessen äußere Normale n mit der x-Richtung den Winkel (n, x) bildet, so daß $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \cos(n, x)\,\mathrm{d}F$. Definiert man $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ als Vektor mit dem Betrag $\mathrm{d}F$ und der Richtung der äußeren Normale, so wird in der Tat $\boldsymbol{i}A_x \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{F} = \pm A_x \,\mathrm{d}F \cos(n, x) = \pm A_x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ (+ am rechten, − am linken Ende). Alle drei Glieder, partiell integriert und summiert, ergeben dann den obigen Satz. Ganz analog kann man ferner beweisen, daß $\int \operatorname{grad} \varphi \, \mathrm{d}V = \oint \varphi \, \mathrm{d}\boldsymbol{F}$. (Greenscher Satz).

Für inkompressible, zähe oder ideale Flüssigkeiten wird aus der Kontinuitätsgleichung (1.23) eine rein kinematische Bedingung für das Geschwindigkeitsfeld in stationärer oder instationärer Strömung, nämlich

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \text{ für } \varrho = \text{const.} \qquad (1.25)$$

Wegen der vektoriellen Identität

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = 0$$

kann man dieses Geschwindigkeitsfeld stets aus einem Vektorpotential $\boldsymbol{A}(x, y, z, t)$ ableiten:

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}.$$

Praktischen Nutzen bringt diese Erkenntnis jedoch meistens erst bei zweidimensionalen Strömungen, wenn zur Beschreibung der Strömung schon zwei Raumkoordinaten ausreichen, wie in ebenen oder drehsymmetrischen Strö-

mungen. Denn dann vereinfacht sich das Vektorpotential zur skalaren Stromfunktion Ψ.

Als eben bezeichnet man eine Strömung, die in parallelen Ebenen – etwa in allen Ebenen $z = \text{const}$ – gleich verläuft, so wie z. B. die Strömung über ein breites Wehr näherungsweise unabhängig von der Breitenkoordinate z ist. In solchen Fällen wird die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1.26}$$

automatisch erfüllt, wenn

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{und} \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \tag{1.27}$$

und die Stromfuktion $\Psi(x, y, t)$ zweimal stetig differenzierbar ist.

In einer drehsymmetrischen Strömung, mit x = Koordinate in Achsenrichtung, r = Achsabstand, u und v = Geschwindigkeitskomponenten in diesen Richtungen, lautet die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r} = 0. \tag{1.28}$$

Deshalb existiert hier nach Stokes eine Stromfunktion $\Psi(x, r, t)$, so daß

$$u = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad \text{und} \quad v = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \tag{1.29}$$

Die Stromfuktion Ψ bringt nun nicht nur den rechnerischen Vorteil mit sich, daß sie die zwei Geschwindigkeitskomponenten u und v durch eine einzige Funktion ersetzt, sie hat darüber hinaus auch eine direkte, anschauliche Bedeutung: die Linien $\Psi = \text{const}$ sind die Stromlinien in den x, y- bzw. x, r-Ebenen. Denn die Gleichung

$$\mathrm{d}\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\mathrm{d}y = 0 \quad \text{(ebene Strömung)}$$

bzw.

$$\mathrm{d}\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \Psi}{\partial r}\mathrm{d}r = 0 \quad \text{(drehsymmetrische Strömung)}$$

ist wegen Gl. (1.27) bzw. Gl. (1.29) zugleich auch die Differentialgleichung der Stromlinien:

$$-v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y = 0, \quad \text{oder} \quad \mathrm{d}x:\mathrm{d}y = u:v \quad \text{(ebene Strömung)}$$

$$-rv\,\mathrm{d}x + ru\,\mathrm{d}r = 0, \quad \text{oder} \quad \mathrm{d}x:\mathrm{d}r = u:v \quad \text{(drehsymmetrische Strömung).}$$

Für kompressible Gase existieren bei stationärer Strömung entsprechende Stromfunktionen, wenn in den obigen Formeln u und v durch ϱu und ϱv ersetzt werden; auch hier sind dann die Linien $\Psi = \text{const}$ zugleich Stromlinien.

1.3.3. Drehung und Geschwindigkeitspotential. Von zentraler Bedeutung für die ganze Strömungslehre ist der kinematische Begriff der mittleren Drehung eines Flüssigkeitsteilchens. Während bei einem sich drehenden starren Körper jeder Teil dieselbe momentane Winkelgeschwindigkeit hat, können nämlich in einer bewegten Flüssigkeit verschiedene Linienelemente am selben Ort ganz verschiedene Drehgeschwindigkeiten haben. Betrachten wir z. B. eine Scherströmung; das ist eine Parallelströmung mit veränderlicher Geschwindigkeit $\partial u/\partial y \neq 0$, wie in Fig. 4. Legt man zur momentanen Markierung eines Linienelements ein Streichholz auf die Flüssigkeit, so wird dieses in der Lage 1 (in Strömungsrichtung) geradlinig fortschwimmen, ohne sich zu drehen; in der Querlage 2 wird es jedoch außerdem mit der momentanen Winkelgeschwindigkeit $\omega = \partial u/\partial y$ gedreht. Bildet es mit der Strömungsrichtung den Winkel α, so wird $\omega = \partial u/\partial y \cdot \sin^2 \alpha$; der Mittelwert für alle möglichen Anfangslagen ist daher

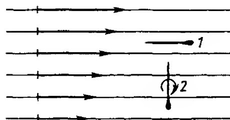


Fig. 4. Zur Winkelgeschwindigkeit in einer Scherströmung

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega \, d\alpha = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} .$$

Allgemeiner studieren wir in Fig. 5 die Deformation und Drehung eines infinitesimalen, ursprünglich rechteckig begrenzten Flüssigkeitsbereichs in einer Projektion in die xy-Ebene. Bis auf Größen zweiter Ordnung bilden die Eckpunkte $OABC$ nach der Zeit δt ein Parallelogramm $OA'B'C'$. Für die Winkel $\delta\gamma_1$ und $\delta\gamma_2$ lesen wir ab

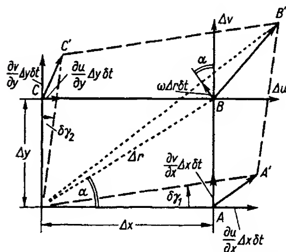


Fig. 5. Deformation eines Volumenelements

$$\delta\gamma_1 = \frac{\partial v}{\partial x}\delta t \quad \text{und} \quad \delta\gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y}\delta t ;$$

der ursprünglich rechte Winkel COA wird also in der Zeiteinheit verringert um

$$\frac{\delta\gamma_1 + \delta\gamma_2}{\delta t} = \frac{2\,\delta\gamma_{xy}}{\delta t} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} .$$

Analog zur Scherung γ_{xy} der Elastizitätstheorie nennt man $\delta\gamma_{xy}/\delta t$ Schergeschwindigkeit.

Andrerseits ist das Mittel der Winkelgeschwindigkeit der Punkte A und C um den Bezugspunkt O, entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn, bestimmt durch

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta\gamma_1}{\delta t} - \frac{\delta\gamma_2}{\delta t}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) . \tag{1.30}$$

Ähnlich wie in der obigen Scherströmung ist das auch hier zugleich die mittlere Winkelgeschwindigkeit aller Punkte in der Nachbarschaft von O. Denn für den

allgemein gelegenen Punkt B wird nach Fig. 5 die Bahngeschwindigkeit um O gleich

$$\omega \Delta r = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y\right) \cos \alpha - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y\right) \sin \alpha$$

mit $\Delta x = \Delta r \cos \alpha$ und $\Delta y = \Delta r \sin \alpha$.

Über alle Winkel gemittelt folgt wieder

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega \, \mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Dies ist nun die Komponente der Winkelgeschwindigkeit um eine Achse parallel zur z-Richtung. Allgemein wird daher die mittlere Winkelgeschwindigkeit eines Linienelements um den Punkt O gleich der halben Rotation des Geschwindigkeitsfeldes dort:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \frac{1}{2} \left[\boldsymbol{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]. \tag{1.31}$$

In diesem Sinn spricht man von einem drehenden Flüssigkeitsteilchen, für das $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} \neq 0$ gilt, und von drehungsfreien Strömungen, in denen – abgesehen von eventuellen singulären Punkten – überall die Rotation verschwindet.

Die mittlere Komponente der Winkelgeschwindigkeit um eine Achse in z-Richtung kann man auch dadurch messen, daß man das Linienintegral der Geschwindigkeit längs des Randes des Flächenstücks $\Delta x \, \Delta y$ in Fig. 5 bildet:

$$\begin{aligned}\oint \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} &= \int_0^A u \, \mathrm{d}x + \int_A^B \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y + \int_B^C \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x + \int_C^0 v \, \mathrm{d}y \\ &= u \Delta x + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x\right) \Delta y - \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y\right) \Delta x - v \Delta y \\ &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \Delta x \, \Delta y.\end{aligned} \tag{1.32}$$

Die letzten beiden Integrale geben negative Beiträge, weil hier die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ und das Wegelement $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ entgegengesetzte Richtung haben. Für dieses Flächenelement $\Delta F = \Delta x \, \Delta y$ wird das Linieninteral – die sog. Zirkulation – gleich $\Delta \Gamma = \operatorname{rot}_z \boldsymbol{v} \, \Delta F$, wobei $\operatorname{rot}_z \boldsymbol{v}$ die z-Komponente von $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ ist.

Eine endlich große Fläche F kann man sich aus solchen Elementen zusammengesetzt denken; bildet man für diese alle das Linienintegral und summiert, so heben sich im Innern von F alle Beiträge $\boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ auf, da jedes Randstück zwischen zwei benachbarten Flächenelementen zweimal, und zwar im entgegengesetzten Sinn umfahren wird. Es bleibt also wieder nur das Linienintegral längs des Randes C von F übrig, und es gilt $\Gamma = \oint_C \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_F \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{F}$. Da man ferner eine gewölbte Fläche durch eine Polyederfläche beliebig genau annähern kann,

läßt sich auch für solche Flächen, die durch eine beliebige geschlossene Raumkurve C begrenzt werden, unter gewissen Stetigkeitsbedingungen der Satz von Stokes (1819–1903) beweisen:

$$\text{Zirkulation } \Gamma = \oint_C \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_F \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{F}. \tag{1.33}$$

Zur Festlegung des Vorzeichens von Γ ist folgende Regel verabredet: die Randkurve C ist bei der Integration in dem Sinne zu durchfahren, daß sie mit der äußeren Normale der Fläche F eine Rechtsschraube bildet. Das Flächenintegral der Rotation verschwindet nun insbesondere dann, wenn die Fläche geschlossen ist und die Randkurve C zu einem Punkt zusammenschrumpft, wie bei einem zugebundenen Sack. In einer überall drehungsfreien Strömung verschwindet die Zirkulation natürlich längs jeder Kurve. Umgekehrt bedeutet aber $\Gamma = 0$ lediglich, daß auf allen Flächen, die durch C begrenzt werden, gleichgroße Beträge an Rotation in beiden Drehsinnen vorkommen. — Ähnlich wie den Gaußschen Satz kann man schließlich für das Volumenintegral über die Rotation noch ableiten, daß

$$\int \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}V = \oint \mathrm{d}\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{v}. \tag{1.34}$$

Welche Flüssigkeitsspannungen können nun – etwa bei der Entstehung einer Strömung in einer ursprünglich ruhenden Flüssigkeit – eine solche Drehung der Teilchen bewirken? Offenbar können reine Normalspannungen, selbst wenn die Drucke z. B. in vertikaler und horizontaler Richtung verschieden groß sind, ein rechteckiges Teilchen wie in Fig. 5 nur wieder zu einem anderen Rechteck deformieren, aber keine mittlere Drehung hervorrufen. (Nicht einmal Schubspannungen können das Teilchen in Drehung versetzen, solange sie an gegenüberliegenden Seiten von gleichem Betrag sind und nur gleich große Winkeländerungen $\delta\gamma_1/\delta t = \delta\gamma_2/\delta t$ verursachen (mit $\overline{\omega} = (1/2)\,(\delta\gamma_1 - \delta\gamma_2)/\delta t = 0$).

In einer völlig reibungslosen Flüssigkeit, in der nur Normalspannungen auftreten, kann demnach kein Teilchen in Drehung versetzt werden, und es gilt überall im Innern der Flüssigkeit $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$. Sehen wir also zunächst von den Randbereichen der Strömung (an der Wand fester Körper oder an freien Oberflächen) sowie von eventuellen Unstetigkeiten der Geschwindigkeit ab, so können wir für stationäre oder instationäre Strömungen in kompressiblen oder inkompressiblen Flüssigkeiten, wenn diese nur reibungslos sind, Drehungsfreiheit annehmen. Wegen der Identität

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi = 0 \tag{1.35}$$

existiert dann – wie sich beweisen läßt – ein skalares Geschwindigkeitspotential $\Phi\,(x, y, z, t)$ mit

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \Phi, \quad \text{oder} \quad u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \text{und} \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \tag{1.36}$$

Aus der einen Funktion Φ können hier alle drei Geschwindigkeitskomponenten abgeleitet werden.

Natürlich muß dieses Potential, abgesehen von den Randbedingungen, noch gewisse physikalische Bedingungen im Innern der Flüssigkeit erfüllen, vor allem

die Kontinuitätsgleichung. So muß speziell bei inkompressiblen, reibungslosen Flüssigkeiten gelten

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0. \tag{1.37}$$

Dies ist offensichtlich die einfachste, nach allen Richtungen symmetrische, lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung; sie kommt in verschiedenen Gebieten der Physik immer wieder vor. Man nennt sie nach Laplace (1749–1827); Funktionen, die dieser Gleichung genügen, werden als Potentialfunktionen bezeichnet. Dagegen bezeichnet man als Potentialströmungen alle diejenigen, für die – abgesehen von eventuellen singulären Raumstellen – ein Geschwindigkeitspotential Φ existiert und die somit drehungsfrei sind; dieses Potential Φ erfüllt jedoch die obige Laplace-Gleichung nur im Falle inkompressibler Flüssigkeit.

1.3.4. Quelle und Wirbel in idealer Flüssigkeit. Die klassische Fragestellung nach der stationären Strömung einer idealen Flüssigkeit um einen ruhenden Körper in Parallelströmung (Geschwindigkeit U in x-Richtung) reduziert sich nach dem Vorigen auf folgende mathematische Frage: Gesucht ist eine Funktion $\Phi(x, y, z)$, für die außerhalb des Körpers überall $\Delta\Phi = 0$ gilt; im Unendlichen (für $r \to \infty$) soll $\partial\Phi/\partial x = u = U$, $v = w = 0$ werden und an der Körperoberfläche $\partial\Phi/\partial n = 0$, damit dort die Normalgeschwindigkeit verschwindet. Nach der Potentialtheorie ist durch diese Randwertaufgabe das Geschwindigkeitspotential Φ bereits eindeutig bestimmt, wenn es im Strömungsbereich zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt wird. Solche Strömungsprobleme sind also durch die Bedingungen der Kontinuität und der Drehungsfreiheit schon rein kinematisch völlig bestimmt, wenn auch zur Berechnung einer dynamischen Größe, wie der des Druckes, dann noch eine dynamische Gleichung (die Bernoulli-Gleichung aus 1.4.1) herangezogen werden muß.

Ein Hauptmerkmal der Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ ist ihre Linearität. Sind Φ_n beliebige Lösungen, so ist daher – abgesehen von den Randbedingungen – auch jede Linearkombination $\sum c_n \Phi_n$ wieder eine Lösung. Bei diesem Superponieren von Lösungen werden die Potentiale algebraisch addiert, wobei die zugehörigen Geschwindigkeitsfelder automatisch vektoriell addiert werden. Auf diese Weise läßt sich leicht eine Vielzahl von Potentialfunktionen finden, die alle als Geschwindigkeitspotential einer Strömung in einer idealen Flüssigkeit gedeutet werden können.

Ein fast triviales Beispiel einer Potentialfunktion ist $\Phi = ax + by + cz$; ihr entspricht mit $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \Phi = \boldsymbol{i}a + \boldsymbol{j}b + \boldsymbol{k}c$ eine Parallelströmung im Raum mit dem Geschwindigkeitsbetrag $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ und der Richtung $u:v:w = a:b:c$.

Eine der wichtigsten Grundlösungen der Laplace-Gleichung ist $\Phi = -a/r$; hier wird $u = ax/r^3$, $v = ay/r^3$ und $w = az/r^3$. Daraus folgt

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{a}{r^3} - 3a\frac{x^2}{r^5} + \frac{a}{r^3} - 3a\frac{y^2}{r^5} + \frac{a}{r^3} - 3a\frac{z^2}{r^5} = \Delta\Phi = 0 \quad \text{für} \quad r \neq 0;$$

d. h. die Kontinuitäts- oder die Laplace-Gleichung ist in der Tat überall erfüllt außer im Nullpunkt des Koordinatensystems. Wegen $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{r}/r^3$ hat die Ge-

schwindigkeit überall die Richtung von $\boldsymbol{r}$ und den Betrag $|\boldsymbol{v}| = a/r^2$; alle Geraden durch den Nullpunkt sind also Stromlinien. Durch eine Kugel um den Nullpunkt mit dem Radius R strömt radial in der Zeiteinheit die Menge $Q = 4\pi R^2 \cdot a/R^2 = 4\pi a$ unabhängig von R; auch aus einer größeren Kugel fließt demnach dieselbe Menge aus, denn es ist ja auch die Kontinuität für $R \neq 0$ erfüllt. Nur im Nullpunkt ist die Strömung singulär; in ihm entsteht nämlich dauernd die Menge $4\pi a$ je Zeiteinheit, und die Geschwindigkeit wird unendlich für $r \to 0$. Ist a negativ, so verschwindet dort diese Menge, und die Flüssigkeit strömt überall radial zum Nullpunkt hin. Man spricht daher je nach dem Vorzeichen von a von einer Punktquelle oder von einer Punktsenke. Verwirklicht ist diese letztere Strömung etwa in der Umgebung eines kleinen Lochs im ebenen Boden eines Gefäßes, aus dem eine schwere Flüssigkeit ausfließt; von der unmittelbaren Lochnähe muß man natürlich absehen.

Bei der analogen ebenen Quell- oder Senkenströmung muß durch jeden Kreis (bzw. Zylinder) um die Quellinie die gleiche Menge q ausfließen. Daher muß hier $|\boldsymbol{v}| = q/2\pi r$ sein oder $\boldsymbol{v} = q\,\boldsymbol{r}/2\pi r^2$, mit $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y$, woraus für das Potential folgt $\Phi = q/2\pi \ln r$ (Fig. 6a).

Eine weitere grundsätzlich wichtige, ebene Strömung ist die des Potentialwirbels. Hier bewegen sich alle Teilchen auf Kreisbahnen um den Nullpunkt mit der Geschwindigkeit $v_\varphi(r)$ unabhängig vom Zentriwinkel φ. In einem starren Körper müßte dann offensichtlich $v \sim r$ sein. In einer Flüssigkeit ist dagegen zunächst jede Geschwindigkeitsverteilung möglich. Fordert man aber noch Drehungsfreiheit der Strömung oder die Existenz eines Potentials Φ, so muß für die Radialgeschwindigkeit gelten $v_r = \partial\Phi/\partial r = 0$ und für die Umfangsgeschwindigkeit $v_\varphi = \partial\Phi/r\,\partial\varphi = v_\varphi(r)$. Aus der ersten Gleichung folgt $\Phi(r, \varphi) = \Phi(\varphi)$ und damit aus der zweiten Gleichung $r v_\varphi(r) = \mathrm{d}\Phi(\varphi)/\mathrm{d}\varphi =$ unabhängig von r, also $v_\varphi = c/r$ und $\Phi = c\varphi = c \arctan y/x$ als einzige Lösung. Auch hier liegt eine Singularität im Nullpunkt vor, in dem die Umfangsgeschwindigkeit wie $1/r$ unendlich wird, während bei der ebenen Quell- oder Senkenstrecke die Radialgeschwindigkeit wie $1/r$ anwächst. Aus $u = -cy/r^2$ und $v = cx/r^2$ folgt wieder, daß div $\boldsymbol{v}$ und rot $\boldsymbol{v}$ überall außerhalb des Nullpunktes verschwinden. Für die Zirkulation längs eines Kreises (um den Nullpunkt) mit dem Radius R entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn ergibt sich hier $\Gamma = \int_0^{2\pi} v_\varphi \cdot R\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi c$ unabhängig von R, insbesondere also auch für einen sehr kleinen Kreis um den Nullpunkt. Allgemein ist ja $\Gamma = \oint \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \oint \operatorname{grad} \Phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \lim_{E \to A} (\Phi_E - \Phi_A)$, wobei A und E Anfangs- und Endpunkt des Integrationswegs bedeuten, die für

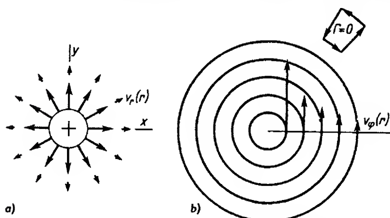


Fig. 6. a) Ebene Quellströmung b) Potentialwirbel

einen geschlossenen Integrationsweg zusammenfallen. Wenn, wie gewöhnlich, Φ eine eindeutige Ortsfunktion ist, so wird $\Gamma = 0$, wie es in einem drehungsfreien Strömungsgebiet auch zu erwarten ist. Das Wirbelpotential $\Phi = c\,\varphi$ ist jedoch mehrdeutig, und der Wert $\Gamma = 2\pi c$ entspricht gerade dem Betrag, um den Φ anwächst, wenn man einmal um den Nullpunkt herumintegriert; es ist der Periodizitätsmodul des mehrdeutigen, zyklischen Potentials $\Phi = c\,\varphi$. Da andererseits außerhalb des Nullpunktes die Strömung überall drehungsfrei verläuft, so verschwindet die Zirkulation längs jeden Weges, der den Nullpunkt nicht einschließt. Wird der Weg z. B. von zwei Kreisen um den Nullpunkt und einem Radiusstück wie in Fig. 6b gebildet, so wird $\Gamma = 0$, da beide Kreise in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden. Beispiele solcher Potentialwirbel – abgesehen von der unmittelbaren Umgebung der Singularität – sind der Tornado, aber auch der Badewannenwirbel über der Ausflußöffnung; ein kreisförmiges Papierstück auf der Wasseroberfläche außerhalb des Luftkerns des Wirbels bewegt sich zwar auf einer Kreisbahn, behält aber dabei dauernd seine Richtung im Raum entsprechend der Drehungsfreiheit der Strömung.

Weitere Potentialströmungen und deren Singularitäten werden später in 2.2 behandelt.

1.4. Dynamik

1.4.1. Eulersche Gleichungen und Bernoulli-Gleichung. Wie schon gezeigt wurde, ist der Spannungszustand in einer reibungslosen, kompressiblen oder inkompressiblen Flüssigkeit viel einfacher als in einer zähen Flüssigkeit: Er ist bereits durch eine skalare Funktion, nämlich durch den Druck $p\,(x, y, z, t)$ bestimmt, und zwar auch in der bewegten Flüssigkeit. Da andererseits gerade die praktisch wichtigsten Flüssigkeiten: Wasser und Luft nur sehr wenig zäh sind, verglichen etwa mit Öl oder Honig, hoffte man, mit dem Modell der reibungslosen Flüssigkeit zumindest gute Näherungen für wirkliche Strömungen berechnen zu können. Jedoch wurde man darin manchmal sehr enttäuscht. So ergibt sich z. B. für einen Körper bei gleichförmiger Bewegung in einer unbegrenzten reibungslosen Flüssigkeit überhaupt kein Widerstand (D'Alembertsches Paradoxon). Durch solche Ergebnisse geriet die Theorie der reibungslosen Flüssigkeit vor allem bei den Praktikern natürlich bald in Mißkredit; trotzdem wird sie noch immer weiter ausgebaut und ist nach wie vor unentbehrlich, nicht nur als relativ einfache Grundlage für die ganze Strömungslehre. Denn seitdem man die Gründe für solche Versager kennt, weiß man auch, wann man reibungslos rechnen darf und welche Strömungserscheinungen man so nicht beschreiben kann. Insbesondere kann man auch in der Gasdynamik die auffallendsten Phänomene oft schon mit dem Modell der reibungslosen, kompressiblen Flüssigkeit erfassen. Deshalb skizzieren wir in diesem Abschnitt die Dynamik reibungsloser Flüssigkeiten oder Gase.

Nach den Vorbereitungen in Abschn. 1.3 können wir die Newtonsche Grundgleichung für einen Massepunkt, also Masse mal Beschleunigung gleich Kraft, direkt anwenden auf ein Flüssigkeitsteilchen $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ wie in Fig. 2. Dessen Masse ist zur Zeit t gleich $\Delta m = \varrho\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$; die substantielle Beschleunigung nach 1.3.1 ist $\boldsymbol{b} = \partial \boldsymbol{v}/\partial t + \operatorname{grad} \boldsymbol{v}^2/2 - \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$. Die von außen an dem Masse-

punkt angreifenden Kräfte sind $\boldsymbol{K}\Delta m = (\boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z)\,m$; so wird z. B. für die Schwerkraft $\boldsymbol{K} = -\boldsymbol{k}g$, wenn die positive z-Achse nach oben weist. Innere Kräfte schließlich ergeben sich hier nur dann, wenn der Druck von Ort zu Ort verschieden ist; nach 1.1.2 und 1.1.3 wird die resultierende Druckkraft am Element $-\mathrm{d}V$ grad p. Insgesamt wird folglich z. B. in x-Richung

$$\Delta m \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \Delta m X - \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x \cdot \Delta y \Delta z,$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{1.38}$$

sowie

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{1.39}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{1.40}$$

Zusammengefaßt kann man auch schreiben

$$\boldsymbol{b} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{grad}\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} - \boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{K} - \frac{1}{\varrho}\operatorname{grad}p. \tag{1.41}$$

Diese Vektorgleichung, bzw. die Gleichungen für die drei Komponenten, nennt man die Eulerschen Gleichungen.

Zusammen mit der Kontinuitätsgleichung hat man jetzt vier unabhängige Differentialgleichungen für die fünf Variablen ϱ, p, u, v und w bei gegebenen äußeren Kräften. Es fehlt noch eine Kennzeichnung der Kompressibilität bzw. der Dichte. In inkompressiblen, homogenen Flüssigkeiten wird ϱ einfach eine Materialkonstante, die im ganzen Strömungsfeld gleich groß ist. Für die meisten Strömungen in einem Gas genügt die nächst einfache Annahme der Barotropie: $\varrho = \varrho\,(p)$; d. h. die Dichte kann in eindeutig vorgegebener Weise allein aus dem Druck berechnet werden, wie z. B. bei der Polytrope in 1.2.3. Weiter ist es dann zweckmäßig, eine Druckfunktion $P(p)$ einzuführen, die definiert ist durch

$$\frac{1}{\varrho}\mathrm{d}p = \mathrm{d}P \quad \text{oder} \quad P = \int \frac{\mathrm{d}p}{\varrho}; \tag{1.42}$$

denn damit wird in der Euler-Gleichung

$$\frac{1}{\varrho}\operatorname{grad}p = \operatorname{grad}P.$$

Schließlich wollen wir nur äußere Kräfte berücksichtigen, die ein Potential U haben, so daß $\boldsymbol{K} = \operatorname{grad} U$; für die Schwerkraft wird z. B. $U = -gz$. Nach Gl. (1.41) existiert dann stets ein Beschleunigungspotential $U - P$, aus dem sich die Beschleunigung eines Teilchens durch Gradientenbildung ergibt:

$$\boldsymbol{b} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{grad}\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} - \boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}(U - P). \tag{1.43}$$

An den Grenzen des jeweils betrachteten Flüssigkeitsbereichs gelten folgende Randbedingungen. An den Wänden fester Körper muß die Normalkomponente

der Relativgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_n$ verschwinden. An der freien Oberfläche einer Flüssigkeit wird dagegen der Druck p überall gleich einem vorgegebenen Druck, z. B. bei Wasserwellen gleich dem Barometerdruck; bei kleinen Wellenlängen, wie etwa bei den kurzen Kapillarwellen, wird dieser Druck noch durch die Oberflächenspannung modifiziert.

Die Integration des Gleichungssystems (1.23 und 1.41) bei vorgegebenen Rändern ist nun wegen der Nichtlinearität der Euler-Gleichungen in den Geschwindigkeiten im allgemeinen schwierig. Um so größer ist die Bedeutung eines Integrals der Euler-Gleichung – nämlich die Bernoulli-Gleichung –, das man allgemein in zwei Fällen angeben kann.

Ist nämlich die Strömung stationär, so kann man die Euler-Gleichung

$$\operatorname{grad} \frac{\boldsymbol{v}^2}{2} - \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \operatorname{grad} (U - P)$$

längs einer Stromlinie $\mathrm{d}\boldsymbol{s} \| \boldsymbol{v}$, die hier auch Bahnlinie ist, sofort integrieren. Denn da das Vektorprodukt $[\boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v}] . \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ verschwindet, wenn $\mathrm{d}\boldsymbol{s} \| \boldsymbol{v}$, so erhält man

$$\operatorname{grad} \left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} - U + P \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0,$$

oder $$P + \frac{\boldsymbol{v}^2}{2} - U = \text{const} = C \quad \text{längs einer Stromlinie.} \tag{1.44}$$

Dabei kann die Integrationskonstante C auf den verschiedenen Stromlinien noch verschieden groß sein; erst dann, wenn $\boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$ gilt, wird C im ganzen Strömungsfeld gleich groß. Das trifft aber z. B. schon für alle Stromlinien zu, die gemeinsam aus einem räumlich großen Strömungsgebiet kommen, in dem die Flüssigkeit praktisch in Ruhe ist; denn dort ist (wie in 1.2.1) $P - U = C$ überall gleich groß, und da sich C längs jeder Stromlinie nicht mehr ändert, gilt auch stromabwärts überall $C = \text{const.}$ (In diesem Fall bleibt die ganze Strömung drehungsfrei, wie später aufgezeigt wird.) Verschiedene Bernoulli-Konstanten C können dagegen etwa zwei zusammentreffende Flüssigkeitsmassen verschiedener Herkunft haben, wie z. B. beim Ausatmen die Atemluft und die Raumluft.

Kann man andererseits von vornherein annehmen, daß die Strömung drehungsfrei ist, d. h. daß überall und stets $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$ gilt, so existiert ein Geschwindigkeitspotential $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \Phi$ und die Euler-Gleichung (1.43) lautet jetzt wegen $\partial \operatorname{grad} \Phi / \partial t = \operatorname{grad} \partial \Phi / \partial t$:

$$\operatorname{grad} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + P - U \right) = 0,$$

oder $$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + P + \frac{\boldsymbol{v}^2}{2} - U = f(t). \tag{1.45}$$

Die Integrationskonstante $f(t)$ hängt nur dann von der Zeit ab, wenn z. B. durch äußere Einwirkung der Druck im Strömungsbereich variiert wird; meistens ist f sowohl räumlich als auch zeitlich konstant, wie bei stationären Randbedingungen.

1.4.2. Anwendungsbeispiele für die Bernoulli-Gleichung

1.4.2.1. Ausfließen von Wasser infolge der Schwere. Das Ausfließen von Wasser aus einem kleinen Loch eines großen Gefäßes ist praktisch ein stationärer Strömungsvorgang, und die Flüssigkeit ist an der Oberfläche, in der alle Stromlinien beginnen, fast in Ruhe. Es gilt also hier die einfache Bernoulli-Gleichung für inkompressible, reibungslose Flüssigkeiten mit $P = p/\varrho$ und $U = -gz$ (z-Koordinate nach oben positiv):

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{v^2}{2} + gz = C. \tag{1.46}$$

Der statische Druck ist an der Oberfläche und am Ausflußloch gleich dem Barometerdruck p_0, die Höhe der Oberfläche (z_0) über dem Loch (z_A) sei $z_0 - z_A = h$. Vergleicht man die Zustände längs der Stromlinien oben und unten, so wird

$$\frac{p_0}{\varrho} + 0 + gz_0 = C = \frac{p_0}{\varrho} + \frac{v_A^2}{2} + gz_A;$$

die Ausflußgeschwindigkeit wird also $|v_A| = \sqrt{2gh}$ (Torricellisches Theorem). Ist der Lochquerschnitt F_A, so wird die Ausflußmenge je Zeiteinheit $Q = \alpha F_A \varrho \sqrt{2gh}$; $\alpha \leqslant 1$ ist die sogenannte Kontraktionsziffer. Nur in einer gut abgerundeten Mündung wird der Strahlquerschnitt gleich dem Lochquerschnitt ($\alpha = 1$). Im Allgemeinen entsteht eine Strahlkontraktion infolge der Trägheit der Wasserteilchen, die in Lochnähe im Gefäß radial dem Loch zuströmen. So wird z. B. für ein Kreisloch in einem dünnwandigen Gefäß $\alpha = 0{,}61$ bis $0{,}64$ (vgl. 2.2.8.3). Wegen der Richtungsunabhängigkeit des Druckes ist es natürlich gleichgültig, ob das Ausflußloch im Boden oder in einer Seitenwand des Gefäßes ist.

1.4.2.2. Ausfluß eines Gases aus einem Überdruckkessel. Für die schnelle Zustandsänderung beim Ausfließen eines Gases aus einem Kessel (Index 0, $v_0 = 0$) durch eine genügend abgerundete Mündung (Querschnitt $F_1 \ll F_0$, Druck $p_1 < p_0$) gilt die Adiabate:

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\varkappa} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1/(\varkappa-1)} \tag{1.47}$$

neben der allgemeinen Gasgleichung $p/\varrho = RT$, T = absolute Temperatur, R = Gaskonstante, z. B. für Luft $R = 288\ \mathrm{m^2/s^2\ °C}$. Die Bernoulli-Gleichung lautet daher (bei Vernachlässigung der Schwere):

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\varrho} = \frac{v^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\,\frac{p_0}{\varrho_0}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{(\varkappa-1)/\varkappa} = 0 + \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\,\frac{p_0}{\varrho_0}. \tag{1.48}$$

Die Geschwindigkeit im engsten Mündungsquerschnitt F_1, wo der Druck p_1 herrscht, wird somit

$$v_1 = |v_1| = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}\,\frac{p_0}{\varrho_0}\left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{(\varkappa-1)/\varkappa}\right]}. \tag{1.49}$$

und die Ausflußmenge (für $p_1 \geqq p^*$, s. unten)

$$Q = F_1 \varrho_1 v_1 = F_1 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1/\varkappa} \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} p_0 \varrho_0 \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{(\varkappa-1)/\varkappa}\right]}. \tag{1.50}$$

Danach würde Q verschwinden für $p_1 = p_0$ oder $p_1 = 0$. Also gibt es eine größte Menge

$$Q_{\max} = F_1 \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{1/(\varkappa-1)} \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa + 1} p_0 \varrho_0}, \tag{1.51}$$

die dann ausfließt, wenn der Mündungsdruck p_1 (hier zugleich der Außendruck) gerade gleich dem sog. kritischen Druck p^* ist, mit

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\varkappa/(\varkappa-1)}. \tag{1.52}$$

Für Luft mit $\varkappa = 1{,}40$ wird z. B. $p^*/p_0 = 0{,}528$. Wenn $p_1 = p^*$ zutrifft, so ist die Austrittsgeschwindigkeit $v_1 = \sqrt{2\varkappa/(\varkappa+1) \cdot p_0/\varrho_0}$ gerade gleich der örtlichen (kritischen) Schallgeschwindigkeit in der Mündung a_1. Denn die Schallgeschwindigkeit, als Fortpflanzungsgeschwindigkeit kleiner Druckstörungen, wird allgemein bestimmt durch $c = \sqrt{\mathrm{d}p/\mathrm{d}\varrho}$ (vgl. 2.3.2), also mit $\varrho(p)$ nach der Adiabate

$$c = \sqrt{\frac{\varkappa p_0}{\varrho_0} \cdot \left(\frac{p}{p_0}\right)^{(\varkappa-1)/\varkappa}}. \tag{1.53}$$

Für das kritische Druckverhältnis in der Mündung nach Gl. (1.52) wird dort speziell $c_1^* = \sqrt{2\varkappa/(\varkappa+1) \cdot p_0/\varrho_0} = v_1^*$; oder, anders ausgedrückt, die örtliche Mach-Zahl, definiert durch Ma = Gasgeschwindigkeit durch örtliche Schallgeschwindigkeit $= v/c$, wird hier gerade $Ma_1 = 1$.

Auch wenn der Außendruck p_A noch kleiner als der kritische Druck p^* ist, bzw. wenn der Kesseldruck z. B. für Luft größer als $p_0 = p_A/0{,}528 = 1{,}89 p_A$ ist, so kann doch keine größere Menge als $Q_{\max}$ ausfließen. Denn da das Gas im Mündungsquerschnitt bereits mit der dortigen Schallgeschwindigkeit strömt, kann eine Änderung des Außenzustandes stromaufwärts keine Änderung des Ausflußvorgangs mehr bewirken; die Ausflußmenge wird deshalb für $p_A < p^*$ völlig unabhängig vom Gegendruck. Jedoch erweitert sich außerhalb der Mündung der Querschnitt des Gasstrahls, und die Gasteilchen erreichen Überschallgeschwindigkeit, wenn die ruhende Luft neben dem Strahl unter einem kleineren Druck p_A steht, als der in der Mündung $p_1 = p^*$. Und zwar expandiert der Strahl wegen der Trägheit des Gases zu stark, so daß in einem gewissen Abstand hinter der Mündung im Strahl Unterdruck entsteht, der den Strahl wieder zusammenzieht, etwa auf den Mündungsquerschnitt und den Mündungsdruck. Erst nach mehreren solcher stehender Schwingungen wird der austretende Gasstrahl durch Vermischen mit der Außenluft aufgelöst.

Will man nun bei $p_A < p^*$ durch eine geregelte Expansion Überschallgeschwindigkeiten erzielen, so muß man an den engsten Mündungsquerschnitt (mit $Ma = 1$) eine sich erweiternde Laval-Düse anschließen wie in Fig. 7. Im direkten Gegensatz zu den gewohnten, langsamen Unterschallströmungen bewirkt nämlich in einer Überschallströmung ($Ma > 1$) eine Querschnittserweiterung der Düse eine

weitere Geschwindigkeitszunahme und Druckabnahme! Denn in der obigen eindimensionalen Stromfadentheorie, in der nur Mittelwerte der Strömung im Düsenquerschnitt betrachtet werden, lautet die Kontinuitätsgleichung $M = F\varrho v = \text{const}$, oder nach logarithmischer Differentiation: $v/F \cdot (dF/dv) = -1 - v/\varrho \cdot (d\varrho/dv)$. Mit der Definition der Schallgeschwindigkeit kann man die Mach-Zahl umschreiben in $Ma^2 = v^2/c^2 = v^2 d\varrho/dp = v/\varrho \cdot (d\varrho/dv) \cdot [\varrho v(dv/dp)]$. Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist aber gleich -1, wie man aus der Differentialform der Bernoulli-Gleichung $v\,dv + dp/\varrho = 0$ erkennt. Es wird daher

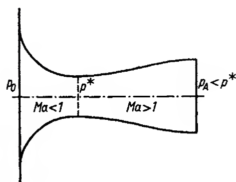


Fig. 7. Lavaldüse

$$\frac{v}{F}\,\frac{dF}{dv} = -1 + Ma^2; \qquad (1.54)$$

d. h. aber $dF/dv < 0$ für $Ma < 1$ und umgekehrt $dF/dv > 0$ für $Ma > 1$. Der Endquerschnitt der Laval-Düse hängt vom jeweiligen Enddruck p_A, bzw. von p_A/p_0, und dem engsten Querschnitt ab. Während die Durchflußmenge dann für $p^* > p_A > 0$ konstant und gleich der maximalen Menge nach Gl. (1.51) ist, kann die Geschwindigkeit schließlich bei der Expansion ins Vakuum $p_A = 0$ nach der Bernoulli-Gl. (1.49) den Maximalwert von $v_{max} = \sqrt{2\varkappa/(\varkappa - 1) \cdot p_0/\varrho_0} = \sqrt{2/(\varkappa - 1)}\, c_0$ erreichen, d. h. also z. B. für Luft mit $\varkappa = 1{,}40$ über das Doppelte der Schallgeschwindigkeit im Kessel.

1.4.2.3. Druck und Schwerefeld; Staudruck in Flüssigkeiten und Gasen. In einer inkompressiblen, schweren Flüssigkeit ist im Ruhezustand der Druck p_R eine Ortsfunktion $p_R = \text{const} - \gamma z$, mit $\gamma = \varrho g =$ spezifisches Gewicht. Wenn in der Flüssigkeit eine Strömung stattfindet, so überlagert sich dieser Druck p_R nach der Euler-Gleichung einfach additiv dem Druckfeld p^*, das dynamisch durch die Strömung entsteht; der statische Druck ist dann $p = p^* + p_R$. Dies trifft auch für zähe, inkompressible Flüssigkeiten zu. Führt man den Druck p^* ein, so vereinfacht sich die Bernoulli-Gleichung für reibungslose Flüssigkeiten $p + \varrho v^2/2 + \gamma z = \text{const}$ folgendermaßen: $p^* + \varrho v^2/2 = \text{const}$. Man rechnet deshalb gewöhnlich so, als ob die Strömung einer Flüssigkeit mit der trägen Masse ϱ je Volumeneinheit im schwerelosen Feld stattfände, und addiert zum so gefundenen Druck den Ruhedruck p_R erst nachträglich. Natürlich ist das dann unzweckmäßig, wenn die Schwerkraft primär wesentlich ist, wie z. B. beim Ausfluß oder bei Wasserwellen. Denn in die hier auftretenden Randbedingungen an der freien Oberfläche ist der wahre, vollständige Druck $p = p^* + p_R$ einzusetzen.

Wird ein Körper in einer Parallelströmung festgehalten, so staut sich an seinem Kopf die Flüssigkeit. Dort, wo sich die Stromlinien zerteilen, um das Hindernis zu umströmen, gibt es einen **Staupunkt**, in dem die Geschwindigkeit völlig verschwindet: $v = 0$. Ist in großer Entfernung vom Körper die Geschwindigkeit U und der Druck p_∞, so gibt die Bernoulli-Gleichung längs der Stromlinie, die zu dem Staupunkt führt, den Druck dort: $p_S + 0 = p_\infty + \varrho U^2/2$. Den Druckanstieg $p_S - p_\infty = \varrho U^2/2$, oder allgemein die Größe $\varrho v^2/2$ nennt man **Staudruck** oder **dynamischer Druck**. Die Summe von statischem Druck p und dynami-

schen Druck $\varrho v^2/2$ bezeichnet man als Gesamtdruck p_{ges}, und es gilt nach Bernoulli $p_{ges} + \gamma z = \text{const}$.

Für die entsprechende Staupunktsströmung in einem kompressiblen, idealen Gas lautet die Bernoulli-Gleichung $P_S + 0 = P_\infty + U^2/2$, oder $U^2/2 = P_S - P_\infty = \int_\infty^S dp/\varrho$. Für adiabatische Strömung mit $p \sim \varrho^\varkappa$ wird

$$\frac{U^2}{2} = \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\left(\frac{p_S}{\varrho_S} - \frac{p_\infty}{\varrho_\infty}\right) = \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\,\frac{p_\infty}{\varrho_\infty}\left[\left(\frac{p_S}{p_\infty}\right)^{(\varkappa-1)/\varkappa} - 1\right], \tag{1.55}$$

oder

$$\frac{p_S}{p_\infty} = \left[\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\,\frac{\varrho_\infty U^2/2}{p_\infty} + 1\right]^{\varkappa/(\varkappa-1)} = \left[\frac{\varkappa-1}{2}\,Ma_\infty^2 + 1\right]^{\varkappa/(\varkappa-1)}, \tag{1.56}$$

mit $Ma_\infty = U/c_\infty$, da für die Schallgeschwindigkeit in der ungestörten Parallelströmung gilt $c_\infty = \sqrt{dp/d\varrho} = \sqrt{\varkappa p_\infty/\varrho_\infty}$. (Bei Überschallströmung mit $Ma_\infty > 1$ entsteht vor dem Körper ein Verdichtungsstoß mit Entropievermehrung, so daß man dann nicht mehr wie oben mit der Adiabate rechnen darf; die obigen Gleichungen gelten daher nur für Unterschall mit $Ma_\infty \leqslant 1$.)

Für kleine Mach-Zahl $Ma_\infty \ll 1$ wird insbesondere

$$\frac{p_S}{p_\infty} \approx 1 + \frac{\varkappa}{2} Ma_\infty^2 + \frac{\varkappa}{8} Ma_\infty^4 \ldots = 1 + \frac{\varrho_\infty U^2/2}{p_\infty}\left(1 + \frac{1}{4} Ma_\infty^2 \ldots\right) \tag{1.57}$$

sowie

$$\frac{\varrho_S}{\varrho_\infty} = \left(\frac{p_S}{p_\infty}\right)^{1/\varkappa} \approx 1 + \frac{1}{2} Ma_\infty^2 + \frac{2-\varkappa}{8} Ma_\infty^4 \ldots \tag{1.58}$$

oder

$$p_S - p_\infty \approx \varrho_\infty \frac{U^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} Ma_\infty^2 \ldots\right). \tag{1.59}$$

Solange $Ma_\infty \leqslant 1/5$ gilt, bei Luft von Zimmertemperatur also bis zu Windgeschwindigkeiten von etwa $330/5 = 66$ m/s kann man nun das strömende Gas als inkompressible Flüssigkeit ansehen, weil dann der Fehler der inkompressiblen Staudruckformel noch kleiner als 1% bleibt.

Die kinetische Energie der anströmenden Luft wird beim Aufstau nun nur teilweise in eine Druck- und Dichteerhöhung umgewandelt, außerdem wird noch ihre innere Energie, d. h. ihre Temperatur, erhöht. Nach der Gasgleichung gilt $p/\varrho = RT$, so daß sich aus Gl. (1.55) für die Differenz der absoluten Temperaturen ergibt $T_S - T_\infty = (\varkappa - 1)/\varkappa \cdot U^2/2R \approx 5 \cdot 10^{-4} U^2$, U in m/s. (Diese Gleichung gilt übrigens auch für Überschall, da man zur Herleitung die Adiabate nicht voraussetzen braucht.) Danach wird z. B. für ein Flugzeug mit Schallgeschwindigkeit in Bodennähe ($U = 330$ m/s) die Staupunktstemperatur um 54 °C größer als die der umgebenden Luft.

1.4.2.4. Gegenbeispiel: Ausfluß von Sand. Als Satyrspiel folge noch das Ausfließen eines Diskontinuums, wie z. B. Sand, aus einem kleinen Loch im Boden eines hochaufgefüllten, großen Gefäßes. Hierfür gibt es allerdings keine Bernoulli-Gleichung. Wegen der Unabhängigkeit des Bodendrucks von der Füllhöhe nach 1.2.4 kann auch der Ausfluß nicht von dieser abhängen, solange sie nicht zu klein ist. Die Beobachtung

zeigt ferner, daß der Sand nur in einem engen, schwach trichterförmigen Schlauch über dem Bodenloch fließt, während der übrige Sand rundherum gar nicht an der Bewegung teilnimmt. Daher kann auch der Gefäßdurchmesser nur von untergeordneter Bedeutung sein, und es bleiben an wesentlichen Größen nur die Dichte ϱ, die Erdbeschleunigung g und der Lochdurchmesser d. Aus diesen Größen kann man nur auf eine einzige Art eine Größe von der Dimension einer Geschwindigkeit bilden, nämlich $\sqrt{gd}$. Das Verhältnis der Ausflußgeschwindigkeit zu dieser Größe muß nach einem bekannten Satz der Dimensionsanalysis eine dimensionslose Konstante sein, so daß $v \sim \sqrt{gd}$. Die Dichte spielt also ebensowenig eine Rolle wie in der analogen Formel für Wasser: $v \sim \sqrt{gh}$ (in 1.4.2.1). Die Ausflußmenge wird danach $Q \sim \pi/4 \cdot d^2 \varrho \sqrt{gd}$. Als Korrektur kann man schließlich noch den mittleren Durchmesser der Sandkörner k einführen und statt d schreiben $d-k$; denn es kann ja überhaupt kein Sand ausfließen, wenn $d < k$. Man erhält dann

$$Q = c\,\frac{\pi}{4}\,\varrho\sqrt{g}\,(d-k)^{5/2}, \text{ mit } c \approx 0{,}7 \text{ nach Versuchen.} \tag{1.60}$$

1.4.3. Newtons Zähigkeitsansatz und das Hagen-Poiseuillesche Gesetz. Das Ausfließen einer wenig zähen Flüssigkeit wie z. B. Wasser aus einem kleinen Loch ist wohl das älteste Beispiel einer Strömung, die mit dem einfachen Modell der reibungslosen Flüssigkeit praktisch ausreichend genau beschrieben werden kann. Das einfachste Gegenbeispiel zeigt jedoch das folgende Experiment. Zwischen zwei ruhenden, parallelen Platten (bei $y = 0$ und $y = a$) befinde sich eine ebenfalls ruhende Flüssigkeit; die untere Platte (bei $y = 0$) bleibe in Ruhe, während die andere in ihrer Ebene auf eine konstante Geschwindigkeit U in x-Richtung beschleunigt werde (Fig. 8). Eine reibungslose Flüssigkeit bliebe dabei auch weiterhin in Ruhe, da ja deren einzige Randbedingung: keine Geschwindigkeit quer zur festen Wand, also $v = 0$ für $y = 0$ und $y = a$, unverändert bleibt.

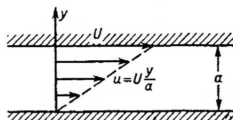


Fig. 8.
Strömung zwischen zwei Platten

Jede wirkliche Flüssigkeit kommt aber erfahrungsgemäß in Bewegung, und zwar deshalb, weil sie an den Plattenwänden haftet; d. h. sie befolgt stets noch die weiteren Randbedingungen: $u(y=0) = 0$ und $u(y=a) = U$. Dadurch entsteht auch im Flüssigkeitsinnern eine Strömung in x-Richtung, und es stellt sich schließlich (bei engem Plattenabstand a) die einfachste Geschwindigkeitsverteilung[1]) ein, nämlich

$$u = U\,\frac{y}{a} \quad \text{und} \quad v = w = 0\,. \tag{1.61}$$

Auch nachdem die obere Platte auf die Geschwindigkeit U gebracht ist, muß noch dauernd eine Kraft X wirken, um die stationäre Strömung zwischen den

[1]) Die Strömung läßt sich z. B. verwirklichen zwischen zwei konzentrischen Zylindern (Radius R_1 und R_2), von denen einer rotiert. Ist die Spaltweite klein: $R_2 - R_1 \ll R_{1,2}$, so wird die obige sog. ebene Couette-Strömung angenähert.

Platten aufrecht zu erhalten; und zwar erweist sich diese Kraft, auf die Plattenfläche F bezogen, gleich

$$\frac{X}{F} = \tau = \mu \frac{U}{a}.$$

(Mit der entsprechenden Gegenkraft muß die untere Platte festgehalten werden.) Die Größe μ nennt man die Zähigkeit. Sie hängt bei Gasen und vor allem auch bei Flüssigkeiten von der Temperatur ab; ihre Dimension ist z. B. im technischen Maßsystem kp s/m².

Spezialisiert man dieses Ergebnis auf dünne, ebene Flüssigkeitsschichten, die übereinander gleiten, so besteht danach zwischen ihnen eine tangentiale Schubspannung

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy}. \tag{1.62}$$

Der Doppelindex kennzeichnet die in x-Richtung wirkende Schubspannung, die an einer Fläche angreift, deren Normale parallel zur y-Richtung ist.

Dieser Ansatz, nach dem die Schubspannung in einer strömenden Flüssigkeit linear von der Deformationsgeschwindigkeit abhängt, stammt schon von Newton (1642–1727); er beschreibt in der Tat das Verhalten der meisten Flüssigkeiten und Gase, solange deren Strömung in einem regelmäßigen Neben- und Übereinandergleiten von Flüssigkeitsschichten besteht. Diese Strömungsform nennt man laminar (lamina = Schicht).

Das wichtigste Anwendungsbeispiel für den Newtonschen Ansatz ist die Strömung in einem engen Rohr mit kreisförmigem Querschnitt (Radius R) (Fig. 9). Alle Teilchen der inkompressiblen Flüssigkeiten bewegen sich hier geradlinig

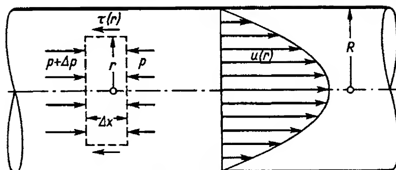


Fig. 9. Laminare Rohrströmung

und unbeschleunigt mit der Geschwindigkeit $u(r)$; r = Achsabstand. Da keine Trägheitskräfte auftreten, müssen Druck- und Zähigkeitskräfte im Gleichgewicht stehen. Der Druckunterschied Δp zwischen zwei Querschnitten im Abstand Δx bewirkt nun an einem Flüssigkeitszylinder vom Radius r eine antreibende Kraft $\Delta p \pi r^2$. An dessen Mantelfläche $2\pi r \Delta x$ wirken bremsend dagegen die Schubspannungen τ mit einer Gesamtkraft $2\pi r \Delta x \tau$. In stationärer Bewegung wird daher $\Delta p \pi r^2 = 2\pi r \Delta x \tau$, oder

$$\tau = \frac{\Delta p}{\Delta x} \frac{r}{2}. \tag{1.63}$$

Nach dem obigen Ansatz (mit $y = R - r$) kann man nun τ durch die Geschwindigkeitsverteilung im Rohr ausdrücken: $\tau = -\mu\, du/dr$. Elimination von τ aus den beiden Gleichungen gibt eine Differentialgleichung für $u(r)$. Integriert man diese unter Berücksichtigung der Haftbedingung an der Rohrwand: $u(r = R) = 0$, so erhält man eine parabolische Geschwindigkeitsverteilung über dem Rohrradius:

$$u = \frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} (R^2 - r^2). \tag{1.64}$$

Daraus folgt schließlich für das Durchflußvolumen je Zeiteinheit:

$$Q = \int_0^R 2\pi r\, dr\, u = \frac{\pi}{8\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} R^4. \tag{1.65}$$

Dies ist das Hagen-Poiseuillesche Gesetz (1839 bzw. 1840). Da sich die darin vorkommenden Größen leicht sehr genau messen lassen, hat die experimentelle Bestätigung dieses Gesetzes durch die meisten Flüssigkeiten und alle Gase die Richtigkeit des einfachen Ansatzes (1.62) erwiesen. Vor allem konnte so auch die allgemeine Gültigkeit der Haftbedingung, selbst für nicht benetzende Flüssigkeiten an sehr glatten Wänden, wie z. B. Quecksilber in Glasröhren, festgestellt werden. Umgekehrt wird jetzt Gl. (1.65) zur genauen Bestimmung der Zähigkeit μ von Flüssigkeiten (im Englerschen Viskosimeter) benutzt. Freilich gilt auch sie nur solange, als die Grundvoraussetzung laminarer Strömung zutrifft, wie etwa in engen Kapillarrohren. In weiten Rohren, z. B. schon in der Wasserleitung, beobachtet man gewöhnlich eine ganz anders geartete turbulente Strömungsform mit völlig abweichenden Gesetzmäßigkeiten (vgl. 3.7.4).

Auffallend ist in Gl. (1.65) die starke Abhängigkeit der Durchflußmenge (proportional R^4) vom Rohrradius, die in unserem Blutkreislauf sozusagen praktisch verwertet wird. Die Adern sind nämlich elastisch; sie können sich erweitern und dadurch eine Steigerung des Blutdurchflusses sehr erleichtern, wenn das – z. B. bei erhöhter Muskeltätigkeit – erforderlich ist. Verringert jedoch Arterienverkalkung diese Elastizität der Blutgefäße, so wird dann statt dessen das Herz zu erhöhter Leistung gezwungen, und der Blutdruck steigt an.

1.4.4. Spannungszustand in zähen Flüssigkeiten. Für beliebige räumliche Strömungen ist nun der Newtonsche Ansatz zu einem allgemeinen Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Deformationsgeschwindigkeiten eines Flüssigkeitselements zu erweitern.

Bezeichnet man die Normalspannungen mit σ und tangentiale Schubspannungen mit τ, so kann man die neun in Fig. 2 (S. 15) auftretenden Spannungen als sogenannte Matrix des Spannungstensors folgendermaßen aufschreiben

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \tag{1.66}$$

In den Zeilen stehen die Spannungen nebeneinander, die in einer Koordinatenrichtung wirken; in den Spalten untereinander sind die Spannungen, die jeweils an der gleichen Fläche (senkrecht zur x-, y- oder z-Richtung) angreifen. Als

positiv sei wie in Fig. 2 die Spannungsrichtung definiert, die auf der jeweils vom Koordinatennullpunkt weiter entfernten Fläche gleich der Koordinatenrichtung ist, und auf den anderen Flächen entgegengesetzt. Die von den Spannungen bewirkten Oberflächenkräfte am Volumenelement heben sich in erster Ordnung gegenseitig auf. Das muß deshalb der Fall sein, weil an jedem beliebigen (auch endlichen) Volumen Gleichgewicht zwischen diesen Oberflächenkräften einerseits und den Trägheits- und äußeren Massenkräften andererseits herrschen muß. Die beiden letzteren sind aber proportional dem Volumen und somit bei hinreichend kleinen Teilchen eine Größenordnung kleiner als die Oberflächenkräfte, die dessen Flächen proportional sind.

Aus dem gleichen Grund muß auch das Drehmoment in erster Ordnung verschwinden, das die Schubspannungen am Teilchen erzeugen, also z. B. das Moment um die y-Achse:

$$\tau_{xz}\,dy\,dz \cdot dx - \tau_{zx}\,dx\,dy \cdot dz = (\tau_{xz} - \tau_{zx})\,dx\,dy\,dz = 0\,,$$

oder

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

und entsprechend für die anderen Achsen

$$\begin{aligned}\tau_{yx} &= \tau_{xy}\\ \tau_{zy} &= \tau_{yz}\,.\end{aligned} \tag{1.67}$$

Ebenso wie in der Elastizitätstheorie ist also auch der Spannungstensor in einer zähen Flüssigkeit immer symmetrisch.

Erst die Unterschiede der entsprechenden Oberflächenkräfte an gegenüberliegenden Flächen des Volumenelements ergeben Kräfte an diesem, die mit den Trägheits- und Massenkräften im Gleichgewicht stehen. Nach Fig. 2 wird also z. B. die Kraft in x-Richtung

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\sigma_x + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zx}\right) dx\,dy\,dz \tag{1.68}$$

oder, wegen der obigen Symmetriebedingung,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\sigma_x + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{xz}\right) dx\,dy\,dz\,, \tag{1.69}$$

und entsprechend in y- und z-Richtung.

1.4.5. Navier-Stokessche Gleichung. Wenn eine Flüssigkeit als Ganzes wie ein starrer Körper bewegt wird, entstehen natürlich keine inneren Spannungen, sondern erst in einer Strömung, in der die Flüssigkeitsvolumen im Lauf der Zeit deformiert werden. Die Deformationsgeschwindigkeit, also die gegenseitige Verschiebung der Flüssigkeitsteilchen in der Zeiteinheit, ist in erster Ordnung bestimmt durch die ersten Ableitungen der Geschwindigkeiten nach den Raumkoordinaten, also durch die neun Größen

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}; \tag{1.70}$$

dabei sind der Kürze halber die Ableitungen durch Indizes bezeichnet: $u_x = \partial u/\partial x$, $u_y = \partial u/\partial y$ usw.

Ist z. B. $\partial u/\partial x = c > 0$, während alle anderen Größen dieser Matrix verschwinden, so wird $u = u_0 + cx$, $v = v_0$ und $w = w_0$; reisen wir in der Strömung mit der Geschwindigkeit u_0, v_0, w_0 des bewegten Koordinatenursprungs mit, so sehen wir die Flüssigkeit von der Ebene $x = 0$ aus nach links und rechts expandieren, wobei die Geschwindigkeit nach außen wächst, wie in Fig. 10a. – Falls nur $\partial u/\partial y$ nicht verschwindet, erhält man die obige Scherströmung zwischen den beiden Platten. Wenn nur $\partial u/\partial y = \partial v/\partial x = c$ nicht verschwinden, ergibt sich eine

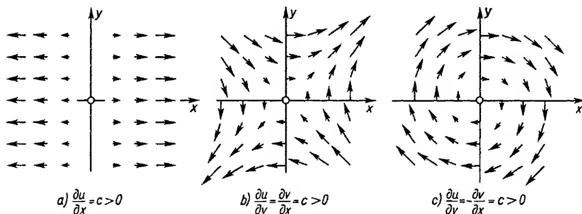


Fig. 10. Geschwindigkeitsfelder

allgemeinere, ebene Scherströmung wie in Fig. 10b. Wenn schließlich nur $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x = c$ nicht verschwinden, dreht sich die Flüssigkeit wie ein starrer Körper um die z-Achse (Fig. 10c).

Im Gegensatz zur Matrix der Spannungen braucht die obige Matrix der Deformationsgeschwindigkeiten keineswegs symmetrisch zu sein. Denn es ist ja kinematisch durchaus möglich, daß z. B. $\partial u/\partial y$ und $\partial v/\partial x$ verschieden sind, während die Schubspannungen an den entsprechenden Stellen in deren Matrix, nämlich τ_{xy} und τ_{yx}, stets gleich groß sind. Man kann also den bei der Plattenströmung erfolgreichen Ansatz nicht einfach dadurch verallgemeinern, daß man setzt: Spannungsmatrix $= \mu$. Matrix der Deformationsgeschwindigkeiten. Eine immer symmetrische Matrix läßt sich jedoch aus den Ableitungen der Geschwindigkeiten dadurch bilden, daß man die konjugierte Matrix zu (1.70) durch Vertauschen der Zeilen und Spalten bildet und diese Matrix zu (1.70) dazuzählt:

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_x & v_x + u_y & w_x + u_z \\ u_y + v_x & 2v_y & w_y + v_z \\ u_z + w_x & v_z + w_y & 2w_z \end{pmatrix}. \quad (1.71)$$

Die neue Matrix hat offensichtlich, wie gewünscht, die gleichen Symmetrieeigenschaften wie die der Spannungen.

Die von der Zähigkeit herrührenden Beiträge zu den Normalspannungen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ können in einer isotropen Flüssigkeit aus Symmetriegründen nur von den Dehnungsgeschwindigkeiten u_x, v_y und w_z abhängen; diejenigen in der Matrix (1.71) sind $2u_x$ usw. Noch allgemeiner kann man ein gemeinsames weiteres Zusatzglied zu σ_x, σ_y und σ_z annehmen, das proportional der Volumenausdehnung ist: $\mu'(u_x + v_y + w_z)$. Die so eingeführte **Volumenviskosität** μ' kann natür-

lich nur in Gasen zu bemerken sein, da in inkompressiblen Medien div $\boldsymbol{v} = 0$ gilt.

Normalspannungen treten schließlich schon in reibungslosen Flüssigkeiten auf, und zwar sind sie dort nach allen Richtungen gleich dem negativen statischen Druck: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$. Insgesamt ist somit folgender Ansatz für die Spannungen in einem zähen, kompressiblen Medium sinnvoll:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} + \mu' \begin{pmatrix} \operatorname{div} \boldsymbol{v} & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{div} \boldsymbol{v} & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{div} \boldsymbol{v} \end{pmatrix} \tag{1.72}$$

also z. B.
$$\sigma_x = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \mu' \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \tag{1.73}$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \text{usw.} \tag{1.74}$$

Für die Strömung zwischen der ruhenden und der bewegten, parallelen Platte mit $v = w = 0$ und $u = Uy/a$ wird danach, wie gefordert, $\tau_{xy} = \mu\, \partial u/\partial y = \mu\, U/a$, $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ und $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$.

Für reibungslose Flüssigkeit ($\mu = 0$, $\mu' = 0$) oder in ruhender Flüssigkeit ($\boldsymbol{v} = 0$) wird wie früher $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$, und alle Schubspannungen τ verschwinden.

In zäher, inkompressibler Flüssigkeit sind danach die Normalspannungen zwar verschieden groß; ihr Mittelwert wird aber wieder gleich dem statischen Druck: $1/3 \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = -p$ wegen $u_x + v_y + w_z = 0$.

Die Kraft auf das Volumenelement, die sich aus den inneren Spannungen z. B. in x-Richtung ergibt: $(\partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{yx}/\partial y + \partial\tau_{zx}/\partial z)$. $\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$ kann nun mit dem obigen Ansatz durch die Geschwindigkeitsverteilung ausgedrückt werden. Zusammen mit der äußeren Volumenkraft gibt sie die Trägheitskraft: Masse mal Beschleunigung, wie bei der Herleitung der Euler-Gleichung für reibungslose Flüssigkeit (1.41). Man erhält somit

$$\varrho \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \varrho X - \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} (\mu' \operatorname{div} \boldsymbol{v}), \tag{1.75}$$

und die entsprechenden Gleichungen für $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ und $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$.

In diesen sehr allgemeinen Gleichungen ist offen gelassen, ob die (isotrope) Flüssigkeit inhomogen ist oder nicht; d. h. die Dichte ϱ und insbesondere auch die Zähigkeit μ (und eventuell μ') können noch vom Ort in der Strömung abhängen, was in gewissen Sonderfällen zu berücksichtigen ist. Die Zähigkeit der meisten Flüssigkeiten nimmt nämlich mit steigender Temperatur stark ab; bei Gasen steigt sie etwas an. Da nun in einem reibenden Medium ein Teil der

mechanischen Strömungsenergie in Wärme umgewandelt wird, kann an Stellen großer Schergeschwindigkeiten die örtliche Temperaturerhöhung die Zähigkeit gegenüber ihrem Wert im übrigen Strömungsfeld merklich verändern, wie z. B. im Schmieröl eines stark belasteten Lagers. Auch in der Gasdynamik ist die Abhängigkeit der Zähigkeit von der Temperatur, die hier Zustandsvariable ist, nicht zu vernachlässigen; außerdem ist hier das Wärmeleitvermögen des Gases zu berücksichtigen. Bei extrem hohen Überschallgeschwindigkeiten, z. B. beim Wiedereintritt eines Satelliten in die Erdatmosphäre, kann allein die Reibungswärme den Flugkörper schon zum Schmelzen bringen.

Gewöhnlich kann man jedoch die Zähigkeit wenigstens näherungsweise im Strömungsfeld als konstant ansehen, für welchen Fall sich die Gleichungen (1.75) wesentlich vereinfachen:

$$\varrho \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \varrho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u + (\mu + \mu') \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \boldsymbol{v}. \tag{1.76}$$

Für inkompressible, zähe Flüssigkeiten fällt schließlich noch das letzte Glied dieser Gleichung fort, und man erhält

$$\varrho \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \varrho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u \tag{1.77}$$

und die beiden entsprechenden Gleichungen. Zusammengefaßt wird hierfür, wenn man noch die kinematische Zähigkeit

$$\nu = \mu/\varrho \text{ (Dimension m}^2\text{/s)} \tag{1.78}$$

einführt, und den pseudovektoriellen Ausdruck $\Delta \boldsymbol{v}$ vermeidet und durch grad div $\boldsymbol{v}$ — rot rot $\boldsymbol{v}$ ersetzt:

$$\boldsymbol{b} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{v^2}{2} - \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{K} - \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p - \nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \tag{1.79}$$

mit div $\boldsymbol{v} = 0$, ϱ und $\nu = \text{const}$.

Das ist die Navier-Stokessche Gleichung (1827 bzw. 1845). Sie unterscheidet sich von der Euler-Gleichung für ideale Flüssigkeiten nur durch das letzte Glied. Da dieses aber gerade die höchsten (zweiten) Ableitungen der Geschwindigkeit nach dem Ort enthält, ist es von entscheidender Bedeutung. Denn nur für die vollständige Differentialgleichung zweiter Ordnung kann außer der trivialen Randbedingung: keine Normalkomponente der Geschwindigkeit an festen Wänden, auch die Haftbedingung: keine Tangentialkomponente längs fester Wände, erfüllt werden. Da nun erfahrungsgemäß alle wirklichen Flüssigkeiten und Gase an festen Körpern haften, sollte deshalb zumindest in der Nähe fester Körper – in der sog. Grenzschicht der Flüssigkeit – die Zähigkeit mitberücksichtigt werden.

1.4.6. Turbulenz; Reynolds-, Froude- und Mach-Zahl. Man könnte nun denken, daß mit der Aufstellung der obigen Grundgleichungen von Seiten der Physik alles getan ist – zumindest für inkompressible Flüssigkeiten –, und daß bei der Anwendung auf spezielle Strömungsprobleme nur noch mathematische Schwierigkeiten auftreten könnten. Das trifft auch insoweit zu, als jetzt nicht mehr

bezweifelt wird, daß diese Gleichungen zum Beschreiben aller wirklichen Flüssigkeitsbewegungen ausreichen müßten. Jedoch ist die Integration dieses Systems nichtlinearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung im allgemeinen so schwierig, daß sie nur in Einzelfällen gelungen ist. Beispiele für die wenigen so berechneten Strömungen werden unter 3.3 beschrieben. Eine zunächst selbstverständlich erscheinende Eigenschaft dieser Lösungen ist die, daß alle Strömungsgrößen wie Geschwindigkeit, Druck usw. in jedem Raum-Zeit-Punkt des Strömungsfeldes definiert und angebbar sind. Bahn- und Stromlinien bilden glatte Raumkurven, und die Strömung besteht in einem Vorübergleiten benachbarter Flüssigkeitsschichten; deshalb spricht man hier von laminarer Strömung.

In der überwiegenden Mehrzahl der praktisch interessierenden Fälle erweist sich aber diese Laminarströmung als instabil, und es entsteht eine völlig andersartige turbulente Strömung. Hier sind dann selbst bei unveränderlichen, stationären Randbedingungen Größen wie die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ und der Druck p im festgehaltenen Raumpunkt nicht mehr zeitlich konstant, sondern schwanken schnell und völlig unregelmäßig um einen zeitlichen Mittelwert $\bar{\boldsymbol{v}}$ bzw. $\bar{p}$. Die momentane Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$ am Ort $\boldsymbol{r}$ setzt sich also hier zusammen aus einer nur im Mittel stationären Geschwindigkeit $\bar{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{r})$ und einer überlagerten Zufallsschwankung $\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r},t)$, so daß $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t) = \bar{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r},t)$. Als mittlere Geschwindigkeit bezeichnet man

$$\bar{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)\,\mathrm{d}t,$$

wobei das Zeitintervall T genügend groß zu wählen ist, so daß der Mittelwert $\bar{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{r})$ unabhängig davon wird. Das entsprechende Zeitmittel der Schwankungsgeschwindigkeit verschwindet definitionsgemäß, nicht aber z. B. das quadratische Mittel $\overline{\boldsymbol{v}'^2} \neq 0$. Da nun die Bewegungsgleichung (1.79) für die momentane Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ nicht linear ist, gilt – wie später in 3.7 gezeigt wird – für die nur im Mittel stationäre Geschwindigkeit $\bar{\boldsymbol{v}}$ einer turbulenten Strömung eine andere Gleichung als für die stationäre laminare Strömung bei denselben äußeren Randbedingungen. Als instationär bezeichnet man turbulente Strömungen, bei denen sich die während relativ kurzer Zeiten T gebildeten Mittelwerte auch noch mit der Zeit ändern.

Die kinematische Grundbedingung, die Kontinuitätsgleichung, gilt natürlich auch für turbulente Strömungen, und zwar – wegen ihrer Linearität – sowohl für die mittlere Bewegung wie für die Schwankungen, also bei inkompressibler Flüssigkeit $\operatorname{div} \bar{\boldsymbol{v}} = \operatorname{div} \boldsymbol{v}' = 0$. Aber im Gegensatz zur laminaren Strömung, bei der die Flüssigkeitsteilchen sich wie auf vorgeschriebenen Bahnen bewegen, machen sie in der turbulenten Strömung von ihrer freien Verschiebbarkeit mehr Gebrauch, als dem Theoretiker lieb ist. Der mittleren Bewegung sind hier kleine und große Wirbel überlagert, die unregelmäßig entstehen und vergehen und nur im Mittel statistische Gesetze befolgen, die zwar aus Versuchen ermittelt, aber noch kaum theoretisch abgeleitet werden können.

Aus all diesen Gründen können insbesondere technische Strömungsprobleme in der Regel erst auf Grund von Modellversuchen vollständig gelöst werden.

Darin begründet sich die Notwendigkeit großer Versuchsanstalten sowohl für die Luftfahrt wie für den Schiffbau. Die Grundfrage bei jedem Modellversuch ist nun: Wann ist bei geometrisch ähnlichen Randbedingungen – z. B. an einem Schiff und an seinem Modell im Schlepptank – auch die Strömung mechanisch ähnlich? Damit einander entsprechende Stromlinien geometrisch ähnlich verlaufen, ist offenbar notwendig, daß an entsprechenden Stellen im Strömungsgebiet das Verhältnis der Kräfte am Flüssigkeitsteilchen jeweils gleich groß ist, daß also dynamische Ähnlichkeit besteht. Eine sicher ausreichende Bedingung dafür ist dann erfüllt, wenn die verglichenen Strömungen von der gleichen dimensionslosen Grundgleichung beschrieben werden. Um diese aufzustellen, führt man eine charakteristische Länge L ein (z. B. Modell- bzw. Schiffslänge) und – anstelle eines Zeitmaßstabs – bequemer eine charakteristische Geschwindigkeit U (z. B. die Fahrtgeschwindigkeit). Bezeichnet man die mit L und U dimensionslos gemachten Koordinaten und Geschwindigkeiten mit einem Stern, z. B. $x^* = x/L$, $\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{v}/U$ und $t^* = tU/L$, so wird für inkompressible, schwere Flüssigkeiten aus Gl. (1.79) nach Division mit U^2/L

$$\frac{d\boldsymbol{v}^*}{dt^*} = \frac{\partial \boldsymbol{v}^*}{\partial t^*} + \operatorname{grad}^* \frac{\boldsymbol{v}^{*2}}{2} - \boldsymbol{v}^* \times \operatorname{rot}^* \boldsymbol{v}^* = -\operatorname{grad}^* \left(\frac{p}{\varrho U^2} + \frac{gL}{U^2} z^*\right) - \\ - \frac{\nu}{UL} \operatorname{rot}^* \operatorname{rot}^* \boldsymbol{v}^*. \tag{1.80}$$

Trägheitskraft je Masseneinheit = (Druckkraft + Schwerkraft + + Reibungskraft) je Masseneinheit

Daraus folgt zunächst für Strömungen, in denen weder die Schwerkraft noch die Flüssigkeitszähigkeit eine Rolle spielen, daß der Druck $p(x,y,z,t)$ proportional der Größe ϱU^2 ist, also auch dem Staudruck der Anströmung $\varrho U^2/2$. Dies trifft z. B. für die Strömung um eine senkrecht angeströmte, dünne Platte zu; ihr Widerstand W bestimmt sich aus dem Integral der Druckunterschiede an der Vorder- und Rückseite, und es wird

$$W = c_{\mathrm{w}} \frac{\varrho}{2} U^2 F, \tag{1.81}$$

mit F = Plattenfläche. Ist der so definierte dimensionslose Widerstandsbeiwert c_{w} in einem Wind- oder Wasserkanal einmal gemessen worden – für eine Kreisscheibe wird z. B. $c_{\mathrm{w}} = 1{,}17$ –, so ist damit der Widerstand aller solchen Scheiben in beliebigen inkompressiblen Medien bekannt.

Wenn man zwar die Schwerewirkungen, nicht aber die der Zähigkeit vernachlässigen kann, wie bei der Mehrzahl der technischen Strömungen, so ist das letzte Glied in Gl. (1.80) mitzuberücksichtigen. Bei geometrisch ähnlichen Randbedingungen darf man mechanische Ähnlichkeit hier zunächst nur dann erwarten, wenn der Maßstabsparameter ν/UL im letzten Glied in den verglichenen Fällen gleich groß ist; diese Ähnlichkeitsbedingung ist sicher hinreichend, wenn auch nicht immer notwendig, Zu Ehren ihres Entdeckers Osborne Reynolds (1842–1912) nennt man diese wichtigste Kennzahl der modernen Strömungslehre bzw. ihren Reziprokwert die Reynoldssche Zahl:

$$Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{\text{charakteristische Geschwindigkeit} \times \text{Länge}}{\text{kinematische Zähigkeit}}. \tag{1.82}$$

Sie kennzeichnet die Größenordnung des Verhältnisses von Trägheits- zu Zähigkeitskräften; nimmt man von beiden Typen je ein Glied als Repräsentanten, z.B. $\varrho u\, \partial u/\partial x$ und $\mu \partial^2 u/\partial y^2$, so wird deren Verhältnis von der Größenordnung UL/ν. (Im geraden Rohr verschwinden die momentanen Beschleunigungen zwar bei laminarer, stationärer Strömung, bei turbulenter aber nicht.) Kleine Re-Zahl – bei kleinen räumlichen Abmessungen und Geschwindigkeiten oder bei sehr zäher Flüssigkeit bedeutet Überwiegen der Zähigkeitskräfte. Bei großer Re-Zahl spielt die Zähigkeit im allgemeinen eine kleinere Rolle, und es kommt dann vor allem auf das Gleichgewicht zwischen Trägheits-, Druck- und äußeren Kräften an.

Von diesem Parameter der dimensionslosen Navier-Stokes-Gleichung hängt nun die jeweilige Strömung in allen Einzelheiten ab. So wird z. B. der obige Widerstandsbeiwert eines Körpers in Parallelströmung im allgemeinen eine Funktion der Re-Zahl: $c_W = c_W(Re)$. Bei den meisten technischen Strömungen in Luft oder Wasser ist die Re-Zahl sehr groß – bis über 10^9 bei großen Schiffen –, die Zähigkeitskräfte sind also meist mehrere Zehnerpotenzen kleiner als die Trägheitskräfte. Trotzdem darf das Reibungsglied in der Navier-Stokes-Gleichung auch dann nicht von vornherein vernachlässigt werden, weil die Re-Zahl Parameter des Gliedes mit den höchsten räumlichen Ableitungen ist. Lösungen der reibungslosen Euler-Gleichung mit $\nu = 0$ brauchen nämlich nicht übereinzustimmen mit den asymptotischen Lösungen der Navier-Stokes-Gleichung für $\nu \to 0$, bzw. $Re \to \infty$. Darüber hinaus darf man im allgemeinen nicht einmal erwarten, daß bei den praktisch vorkommenden Re-Zahlen die Lösungen bereits monoton zur asymptotischen Lösung für $Re \to \infty$ konvergieren. Das zeigt Fig. 11, in der gemessene Widerstandsbeiwerte c_W für quer angeströmte Kreisscheiben und Zylinder, sowie für Kugeln über der Re-Zahl aufgetragen sind (Re = Anströmgeschwindigkeit × Durchmesser/ν). Nur bei der Scheibe fällt c_W mit wachsender Re-Zahl fast monoton auf den Endwert 1,17 ab. Der Widerstand von Zylinder und Kugel hängt dagegen in sehr komplizierter Weise von Re ab. Besonders überrascht der plötzliche Widerstandsabfall bei $Re \approx 1$ bis $4 \cdot 10^5$; die bis dahin laminare Grenzschichtströmung in der Nähe des Körpers wird hier turbulent, und je turbulenter schon die Anströmung ist, desto früher erfolgt dieser Umschlag. Bedenkt man, daß auch diese Einzelheiten im Grunde bereits in der Navier-Stokes-Gleichung enthalten sein müssen, so kann man die Schwierigkeit einer Integrationstheorie für große Re-Zahlen ahnen. Bisher ist diese Integration auch nur für den anderen Grenzfall sehr zäher Strömung mit $Re \ll 1$ gelungen.

Bei Strömungen, in denen außer der Reibungskraft auch noch die Schwerkraft wesentlich ist, wie z. B. an einem Schiff, das Wellen aufwirft, kommt zur Re-Zahl noch ein weiterer kennzeichnender Parameter hinzu, nämlich gL/U^2 im mittleren Glied der Gl. (1.80). Diese Größe ist für das Verhältnis Schwerkraft zu Trägheitskraft am Flüssigkeitselement maßgebend. Als Kennzahl definiert man hier die nach *W.* Froude (1810–1879) benannte Dimensionslose

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}, \tag{1.83}$$

damit auch diese Zahl der charakteristischen Geschwindigkeit U proportional ist; das Schwereglied in Gl. (1.80) lautet damit $(\text{grad}^* z^*)/Fr^2$. Hier hängen nun alle Einzelheiten der Lösungen von zwei Kennzahlen ab, nämlich von Re und Fr;

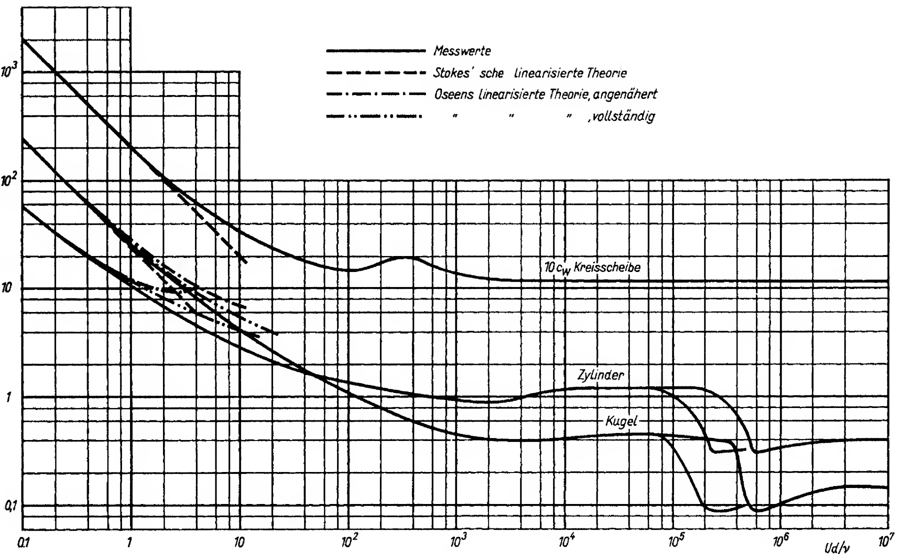


Fig. 11. Widerstandsbeiwerte c_w für Kugel, Kreiszylinder und Kreisscheibe

insbesondere wird auch der Beiwert des Schiffswiderstands $c_W = c_W\,(Fr,\, Re)$. Eine prinzipielle Schwierigkeit für Modellversuche an Schiffen ergibt sich daraus, daß es unmöglich ist, im Versuch beide Kennzahlen ebenso groß zu machen wie am Schiff. Ist z. B. der Modellmaßstab $L_M : L_S = 1:25$, so ergibt sich gleiche Fr-Zahl am Modell wie am Schiff und somit ein ähnliches Wellensystem, wenn $U_M : U_S = 1:5$. Gleichzeitig wird jedoch die Re-Zahl des Modells viel zu klein, nämlich $Re_M : Re_S = 1:125$. Überhaupt kann man in Wind- oder Wasserkanälen nur Re-Zahlen bis zur Größenordnung 10^7 erreichen und nie die Re-Zahl großer Schiffe; d. h. strenge Ähnlichkeit bezüglich der Reibungskräfte kann überhaupt nicht erreicht werden.

Die Reihe solcher Kennzahlen der Strömungslehre, deren jede ein Ähnlichkeitsgesetz beinhaltet, ist damit freilich nicht abgeschlossen. Denn je mehr physikalische Eigenschaften des Mediums für einen Strömungsvorgang wichtig sind, um so mehr Kennzahlen sind zu berücksichtigen, z. B. bei Problemen der Wärmeleitung und des Wärmeübergangs im strömenden Medium.

Für Strömungen, bei denen die Kompressibilität des Mediums wesentlich ist, wie z. B. in der Gasdynamik, ist die bereits erwähnte Mach-Zahl Ma = Strömungsgeschwindigkeit zu Schallgeschwindigkeit die wichtigste Kennzahl. Hier ist der Zeit- oder Geschwindigkeitsmaßstab nicht mehr frei verfügbar, da für jeden Gaszustand bereits eine bestimmte Geschwindigkeit charakteristisch ist, nämlich die des Schalls, als Fortpflanzungsgeschwindigkeit kleiner Störungen. Dem Modell einer inkompressiblen Flüssigkeit ist dagegen eine unendlich große Schallgeschwindigkeit zuzuschreiben, da hier jede lokale Störung momentan auf alle Gebiete des Strömungsfeldes einwirkt. Natürlich hat zwar jede wirkliche Flüssigkeit eine endliche Schallgeschwindigkeit, – für Wasser ist sie 1400 m/s; –, doch ist sie so groß, verglichen mit üblichen Strömungsgeschwindigkeiten, daß sie nur in Spezialproblemen als endliche Größe angesetzt und besonders berücksichtigt werden muß.

2. Reibungslose Flüssigkeiten

2.1. Allgemeine Sätze

2.1.1. Impulssatz. Wenn man nur an Bruttowirkungen einer Strömung und nicht an deren Einzelvorgängen interessiert ist, kann man die ganze Flüssigkeit oder gewisse Teilbereiche von ihr als Massenpunkthaufen ansehen und Sätze der allgemeinen Mechanik, insbesondere den Schwerpunktsatz, darauf anwenden. Die Eigenschaften des Strömungsmediums können dabei zunächst noch ganz beliebig sein; um den Satz praktisch gebrauchen zu können, muß man jedoch wieder von den Teilchenkoordinaten der Punktmechanik übergehen zu raumfesten Euler-Koordinaten.

Als Impuls oder Bewegungsgröße bezeichnet man bekanntlich den Vektor Masse mal Geschwindigkeit $m\boldsymbol{v}$. Der Schwerpunktsatz lautet dann: Die zeitliche Änderung des gesamten Impulses $\vec{I}$ eines abgegrenzten Punkthaufens ist gleich

der Summe der äußeren Kräfte $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{I} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum m\boldsymbol{v} = \sum$ äußere Kräfte. Da die entsprechende Beziehung schon für jeden einzelnen Massenpunkt gilt, ist der unsichtbare Kern des Satzes der, daß die inneren Kräfte, die die Massenpunkte gegenseitig aufeinander ausüben, sich gerade aufheben.

Für ein Strömungsmedium, das als Kontinuum dargestellt werden kann, wird zunächst aus der Summe $\sum m\boldsymbol{v}$ ein Volumenintegral über den jeweiligen flüssigen Bereich $\vec{I} = \int\limits_{\mathrm{Fl}} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m = \int\limits_{\mathrm{Fl}} \boldsymbol{v}\varrho\,\mathrm{d}V$. Die Flüssigkeitsteilchen an dessen Grenze bilden eine flüssige Oberfläche, die sich mit der Strömung zeitlich verändert.

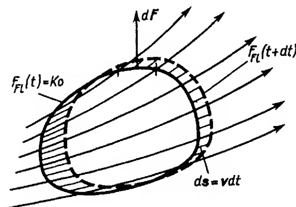


Fig. 12. Verformung der Oberfläche F_{Fl} eines flüssigen Volumens in der Zeit $\mathrm{d}t$; raumfeste Kontrollfläche Ko

Bequemer zu berechnen wäre nun das Impulsintegral über ein Volumen, das von einer raumfesten sogenannten Kontrollfläche Ko begrenzt ist, wie sie als Beispiel in Fig. 12 gezeichnet ist. Sie grenze zur Zeit t ein flüssiges Volumen ein, dessen Oberfläche zur Zeit $t + \mathrm{d}t$ sich zu $F_{\mathrm{Fl}}(t + \mathrm{d}t)$ verformt hat, da sich jedes seiner Teilchen um $\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t$ im raumfesten System weiterbewegt hat. Der Impulsinhalt ändert sich nun einerseits lokal, falls die Strömung instationär ist, um $\int\limits_{Ko} \frac{\partial}{\partial t}(\varrho\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}V$; dabei genügt es, über das von der Kontrollfläche eingeschlossene Volumen zu integrieren, das ja zur Zeit t mit dem flüssigen Volumen identisch ist.

Der Gesamtimpuls ändert sich aber außerdem vor allem noch konvektiv dadurch, daß gewisse Teile des flüssigen Bereichs – nämlich die in Fig. 12 schraffierten – während der Zeit $\mathrm{d}t$ in Gebiete mit anderer Dichte und Geschwindigkeit hineinwandern. Vom raumfesten System aus gesehen, ist diese Impulsänderung der Flüssigkeitsmenge während der Zeit $\mathrm{d}t$ aber auch gerade gleich dem Impulsausfluß durch die gesamte Kontrollfläche: $\int\limits_{Ko} \boldsymbol{v}\varrho\,\mathrm{d}Q\,\mathrm{d}t$, mit $\varrho\,\mathrm{d}Q =$ Flüssigkeitsmenge, die in der Zeiteinheit durch ein Element $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ der Kontrollfläche ausströmt, also $\varrho\,\mathrm{d}Q = \varrho\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{F}$. Insgesamt wird somit die substantielle Impulsänderung je Zeiteinheit

$$\frac{\mathrm{d}\vec{I}}{\mathrm{d}t} = \int\limits_{Ko} \frac{\partial}{\partial t}(\varrho\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}V + \int\limits_{Ko} \boldsymbol{v}(\varrho\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{F}). \tag{2.1}$$

Dies ist nun gleich der Summe der äußeren Kräfte, die zur Zeit t auf die Flüssigkeitsmenge wirken, die dann durch die Kontrollfläche abgegrenzt wird. Diese Kräfte sind

1. Druckkräfte senkrecht zur Kontrollfläche, also $-\int\limits_{Ko} p\,\mathrm{d}\boldsymbol{F}$; das negative Vorzeichen rührt daher, daß ein nach Innen gerichteter Druck positiv definiert ist, $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ jedoch in Richtung der äußeren Normale.

2. Reibungskräfte, die vor allem tangential längs der Kontrollfläche wirken und von den Zähigkeitseigenschaften der Flüssigkeit abhängen; diese wollen wir hier vernachlässigen.

3. Volumenkräfte $\int \varrho \boldsymbol{K} \mathrm{d}V$, vor allem die Schwerkraft $\int\limits_{Ko} \varrho \boldsymbol{g} \mathrm{d}V$, und

4. Fremdkräfte $\boldsymbol{H}_\mathrm{F}$, die auf etwaige feste Körper innerhalb der Kontrollfläche ausgeübt werden, wie z. B. die Kraft, mit der der Flügel in Fig. 13 festgehalten werden muß, damit er nicht von der Strömung mitgerissen wird. Natürlich könnte man diese Kraft auch durch das Integral über die Druck- und Reibungskräfte längs der Körperoberfläche ersetzen, indem man diese zur Kontrollfläche dazuzählt. Meistens will man aber gerade mit dem Impulssatz nur diese Fremdkraft selbst berechnen oder die entgegengesetzt gleich große Kraft, die umgekehrt die Flüssigkeit auf den Körper ausübt. Insgesamt wird dann

$$\int\limits_{Ko} \frac{\partial}{\partial t}(\varrho \boldsymbol{v}) \mathrm{d}V + \int\limits_{Ko} \boldsymbol{v}(\varrho \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{F}) = -\int\limits_{Ko} p \mathrm{d}\boldsymbol{F} + \int\limits_{Ko} \varrho \boldsymbol{K} \mathrm{d}V + \boldsymbol{H}_\mathrm{F}. \tag{2.2}$$

Analog hierzu kann man auch den Flächensatz: die zeitliche Änderung des Impulsmoments um einen Punkt ist gleich dem resultierenden Moment der äußeren Kräfte, auf ein Strömungsgebiet anwenden.

Im obigen Impulssatz sind natürlich die früher abgeleiteten Eulerschen Differentialgleichungen mitenthalten. Transformiert man nämlich darin das Oberflächenintegral über den Druck mit dem Greenschen Satz in ein Raumintegral: $-\int p \, \mathrm{d}\boldsymbol{F} = -\int \operatorname{grad} p \, \mathrm{d}V$, so wird für reibungslose Flüssigkeiten ohne Fremdkräfte im betrachteten Volumen z. B. die Komponentengleichung in x-Richtung:

$$\int \frac{\partial}{\partial t}(\varrho u) \, \mathrm{d}V + \int \varrho u \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{F} = -\int \frac{\partial p}{\partial x} \, \mathrm{d}V + \int X \varrho \, \mathrm{d}V, \tag{2.3}$$

mit X = äußere Volumenkraft in x-Richtung. Nochmalige Anwendung des Gaußschen Satzes gibt

$$\int \left\{ \frac{\partial}{\partial t}(\varrho u) + \operatorname{div}(\varrho u \boldsymbol{v}) + \frac{\partial p}{\partial x} - X \varrho \right\} \mathrm{d}V = 0. \tag{2.4}$$

Zusammen mit der Kontinuitätsgleichung $\partial \varrho / \partial t + \operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{v}) = 0$ wird ferner $\operatorname{div}(\varrho u \boldsymbol{v}) = u \operatorname{div} \varrho \boldsymbol{v} + \varrho \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} u = -u \, \partial \varrho / \partial t + \varrho \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} u$, und somit

$$\int\limits_{Ko} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} - X \right\} \varrho \, \mathrm{d}V = 0. \tag{2.5}$$

Umschließt die Kontrollfläche nur ein infinitesimales Volumen, so muß schon der Integrand verschwinden, woraus die erste Komponente der Euler-Gleichung folgt.

2.1.2. Kräfte auf einen Körper in Parallelströmung. Ein Grundproblem der Strömungslehre ist offenbar die Bestimmung der Kräfte, die die Flüssigkeit auf einen Körper ausübt, der sich in ihr unbeschleunigt auf einer Geraden bewegt, bzw. der Kräfte, mit denen ein Körper in einer stationären Parallelströmung

festgehalten werden muß. Für das einfache Modell der reibungslosen Flüssigkeit ermöglicht der Impulssatz hierfür sehr allgemein gültige Aussagen, die vor allem zeigen, worauf es bei diesen Strömungen ankommt.

Ähnlich wie in Fig. 13 sei in eine reibungs- und schwerelose, unbegrenzte Parallelströmung der Geschwindigkeit U ein beliebiger Körper hineingehalten. Das stationäre Geschwindigkeitsfeld schreiben wir $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}U + \boldsymbol{v}'$, wo $\boldsymbol{v}'$ die Störung der Parallelströmung durch den Körper darstellt. In Körpernähe ist $\boldsymbol{v}'$ natürlich von der gleichen Größenordnung wie U. Wir wollen aber voraussetzen, daß die Störung nach außen hin für große Entfernungen vom Körper ($r \to \infty$) abklingt, und daß dort $|\boldsymbol{v}'| \ll U$ wird. Verdichtungsstöße (2.3.4), die im reibungslosen Medium beliebig weit reichen, sind daher auszuschließen; d. h. das Folgende gilt nur für Unterschallströmungen. Mit $\boldsymbol{v}'$ klingt auch das Druckfeld des Körpers nach außen hin ab, das wir aus dem Geschwindigkeitsfeld mit der Bernoulli-Gleichung (1.44) ableiten können. Für eine große Kontrollfläche in weiter Entfernung vom Körper können wir diese Gleichung nun linearisieren, indem wir $\varrho = \varrho_\infty = \text{const}$ und $v^2/2 = U^2/2 + Uu'$ setzen; dann wird für $r \to \infty$ in erster Näherung: $\Delta p = p - p_\infty \approx -\varrho_\infty Uu'$, mit p_∞ = Druck und ϱ_∞ = Dichte in der ungestörten Parallelströmung. Damit wird jetzt die Haltekraft $\boldsymbol{H}_F$ nach dem Impulssatz (2.2) gleich

$$\boldsymbol{H}_F = \int p\,d\boldsymbol{F} + \int \boldsymbol{v}(\varrho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{F}) = \int_{Ko} -\varrho_\infty Uu'\,d\boldsymbol{F} + \int_{Ko} \boldsymbol{v}(\varrho_\infty \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{F}) \tag{2.6}$$

für eine sehr große Kontrollfläche bei $r \to \infty$.

2.1.2.1. Widerstand. Um zunächst die Komponente der Haltekraft $\boldsymbol{H}_F$ in Richtung der Anströmung, also H_{Fx}, die dem Körperwiderstand W entgegengesetzt gleich ist, zu berechnen, multiplizieren wir Gleichung (2.6) mit $\boldsymbol{i}$ und erhalten für die Glieder erster Ordnung in $|\boldsymbol{v}'|/U$ für $r \to \infty$

$$\begin{aligned} H_{Fx} &= \int_{Ko} -\varrho_\infty U u'\,\boldsymbol{i}\cdot d\boldsymbol{F} + \int_{Ko} \varrho_\infty (U + u')(\boldsymbol{i}U + \boldsymbol{v}')\cdot d\boldsymbol{F} \\ &= \int_{Ko} \varrho_\infty U^2 \boldsymbol{i}\cdot d\boldsymbol{F} + \varrho_\infty U \int_{Ko} \boldsymbol{v}'\cdot d\boldsymbol{F}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

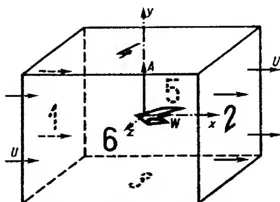


Fig. 13. Körper in Parallelströmung

Im ersten Integral verschwindet $\boldsymbol{i}\cdot d\boldsymbol{F}$ für alle Teile der Kontrollfläche von Fig. 13 außer für F_1 und F_2 bei $x \to -\infty$ bzw. $x \to +\infty$, wo $\boldsymbol{i}\cdot d\boldsymbol{F} = -dy\,dz$ bzw. $+dy\,dz$ wird, da $d\boldsymbol{F}$ in Richtung der äußeren Normale positiv definiert war. F_1 und F_2 sind dem Betrage nach gleich groß, und der erste Integrand $\varrho_\infty U^2$ ist überall konstant; daher verschwindet das erste Integral. Das zweite Integral

$$\varrho_\infty \int_{Ko} \boldsymbol{v}'\cdot d\boldsymbol{F} = \varrho_\infty Q \tag{2.8}$$

ist die Flüssigkeitsmenge, die in der Zeiteinheit aus der Kontrollfläche oder auch aus dem Körper mehr aus- als einfließt.

Für einen gewöhnlichen, undurchlässigen Körper verschwindet natürlich auch dieses Integral und damit die Haltekraft überhaupt. In unbegrenzter, reibungsloser und stationärer Parallelströmung erfährt also ein Körper gar keinen Widerstand, wenn die durch ihn bewirkte Störung der Grundströmung in großer Entfernung abklingt:

$$H_{Fx} = -W = 0 \quad (\text{für } Q = 0) \quad (\text{d'Alembertsches Paradoxon}). \tag{2.9}$$

Den Fall $Q \neq 0$ kann man sich etwa dadurch verwirklicht denken, daß man durch eine Haltestange Flüssigkeit leitet und aus dem Körper in die Parallelströmung drückt oder daraus dauernd Flüssigkeit absaugt. Wird dabei eine bestimmte Richtung bevorzugt, so muß der Impuls, der so zusätzlich in die Strömung eingeführt oder weggenommen wird, gesondert berücksichtigt werden. Die Voraussetzungen, die zu Gl. (2.7) führten, bleiben jedoch noch erhalten, wenn das Ein- oder Abführen von Flüssigkeit nach allen Seiten hin symmetrisch erfolgt wie bei einer Quelle der Ergiebigkeit $Q > 0$ bzw. einer Senke mit $Q < 0$. Für die Haltekraft in Anströmrichtung ergibt sich hierfür

$$H_{Fx} = \varrho_\infty U Q; \tag{2.10}$$

sie hat also für eine Quelle dieselbe Richtung wie die Anströmung. Das heißt aber: Eine angeströmte oder bewegte Quelle erfährt einen Vortrieb, eine Senke Widerstand. An einem Körper, der sich durch ruhende Flüssigkeit bewegt, könnte man also schon durch Ausfließenlassen von Flüssigkeit nach allen Seiten hin einen Vortrieb erzeugen. Praktisch wäre das allerdings sehr unrationell, da man die ganze Flüssigkeitsmenge $\varrho_\infty Q T$ (T = Fahrtdauer) mit der Körpergeschwindigkeit U schon mit sich führen müßte, um von deren Impuls dann je Zeiteinheit den Anteil $\varrho_\infty Q U$ an die ruhende Umgebung abgeben zu können. Zweckmäßiger ist es natürlich, am Körper vorbeistreichende Flüssigkeit nach hinten zu beschleunigen, etwa durch einen Propeller oder Düsenantrieb, und durch die Erhöhung ihres Impulses einen Vortrieb oder Schub zu erzeugen.

2.1.2.2. Auftrieb und Querkraft. Zur Berechnung der Haltekraft in y-Richtung, also quer zur Anströmrichtung, multiplizieren wir die Impulsgleichung (2.6) mit dem Einheitsvektor $\boldsymbol{j}$ in dieser Richtung und vernachlässigen Glieder höherer Ordnung in $|\boldsymbol{v}'|/U$

$$\begin{aligned} H_{Fy} &= -\int_{Ko} \varrho_\infty U u' \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{F} + \int_{Ko} \varrho_\infty v' (U \boldsymbol{i} + \boldsymbol{v}') \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{F} \\ &= \varrho_\infty U \int_{Ko} (-u' \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{F} + v' \boldsymbol{i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{F}). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Wieder wird $\boldsymbol{i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{F} = -\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ auf F_1 für $x \to -\infty$ und $+\mathrm{d}y dz$ auf F_2 für $x \to +\infty$; auf allen anderen Teilflächen wird $\boldsymbol{i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{F} = 0$. Ähnlich gilt $\boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{F} = -\mathrm{d}x\mathrm{d}z$ auf F_3 für $y \to -\infty$ und $+\mathrm{d}x\mathrm{d}z$ auf F_4 für $y \to +\infty$ und $\boldsymbol{j}\mathrm{d}\boldsymbol{F} = 0$ auf den anderen Teilflächen der Kontrollfläche. Daher wird der Auftrieb A_y, die Kraft der Flüssigkeit auf den Körper in y-Richtung, gleich:

$$\begin{aligned} A_y = -H_{Fy} &= -\varrho_\infty U \iint_{Ko} [-v'(F_1)\mathrm{d}y + v'(F_2)\mathrm{d}y + u'(F_3)\mathrm{d}x - u'(F_4)\mathrm{d}x] \cdot \mathrm{d}z \\ &= -\varrho_\infty U \int \Gamma_z(z)\mathrm{d}z, \end{aligned} \tag{2.12}$$

mit
$$\Gamma_z(z) = \oint [-v'(F_1)\,dy - u'(F_4)\,dx + v'(F_2)\,dy + u'(F_3)\,dx]$$
$$= \oint \boldsymbol{v}' \cdot d\boldsymbol{s} \quad \text{für} \quad z = \text{const.} \tag{2.13}$$

$\Gamma_z(z)$ ist also die Zirkulation längs der Schnittlinie der Kontrollfläche mit der Ebene $z = \text{const.}$ Wie später (2.1.3) gezeigt wird, ist die in zunächst ruhender, idealer Flüssigkeit entstandene Außenströmung um den Körper gewöhnlich drehungsfrei; man erhält dann dieselbe Zirkulation $\Gamma_z(z)$ auch längs jedes anderen Integrationswegs, der in der Ebene $z = \text{const}$ liegt und den Körper umschließt. In diesen xy-Ebenen sei $\Gamma_z(z)$ wie früher positiv definiert für einen Integrationsweg entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn.

In einer von z unabhängigen, ebenen Strömung erübrigt sich die Integration über z, und man hat für den Auftrieb a_y je Längeneinheit in Querrichtung

$$a_y = -\varrho_\infty U \Gamma_z. \tag{2.14}$$

Diese Beziehung fanden Kutta (1902) und Joukowski (1905) unabhängig voneinander. Sie zeigt in schöner Klarheit, wann in einer stationären Strömung mit z. B. horizontaler Anström- oder Flugrichtung eine Querkraft auf den Körper in vertikaler Richtung wirkt. Dazu muß vor allem die Strömung unterhalb und oberhalb des Körpers unsymmetrisch sein, und zwar auch noch in größerer Entfernung von dem eventuell unsymmetrischen Körper; das einfachste und allgemeinste, kinematische Kennzeichen dafür ist das Vorhandensein einer Zirkulation Γ_z. Rechtsdrehende, negative Zirkulation erzeugt in Fig. 14 oberhalb des Körpers Übergeschwindigkeit, unterhalb Untergeschwindigkeit verglichen mit der Fluggeschwindigkeit U; dem entsprechen nach der Bernoulli-Gleichung oben Unterdrucke, unten Überdrucke, die zusammen einen (positiven) Auftrieb nach oben ergeben. Zum Entstehen dieses dynamischen Auftriebs ist ferner eine Flug- oder Fahrtgeschwindigkeit U nötig, im Gegensatz zum statischen Auftrieb von Luftballons oder Schiffen. Schließlich ist der Auftrieb auch noch der Flüssigkeitsdichte proportional; deshalb ist z. B. der Tragflügel eines Tragflächenboots im Wasser sehr viel kleiner als der eines gleich schweren Flugzeugs.

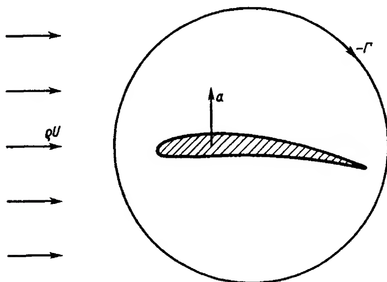


Fig. 14. Zum Kutta-Joukowskischen Satz

Die Haltekraft in z-Richtung H_{Fz}, bzw. die Querkraft A_z kann man durch Vertauschen der Koordinaten y und z (und des Vorzeichens) ableiten:

$$A_z = -H_{Fz} = +\varrho_\infty U \int \Gamma_y(y)\,dy, \tag{2.15}$$

mit $\quad \Gamma_y(y) = \oint \boldsymbol{v}' \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ in Ebenen $\quad y = \text{const.}$ (2.16)

Schließlich kann man diese Teilergebnisse zusammenfassen, wenn man einen Zirkulationsvektor einführt:

$$\vec{\Gamma} \equiv \boldsymbol{i} \int \Gamma_x(x)\,\mathrm{d}x + \boldsymbol{j} \int \Gamma_y(y)\,\mathrm{d}y + \boldsymbol{k} \int \Gamma_z(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{Ko} \mathrm{d}\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{v}'. \tag{2.17}$$

Dabei ist $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ wieder ein Element der Kontrollfläche mit der Richtung der äußeren Normale. Nach Stokes ist ferner

$$\vec{\Gamma} = \oint_{Ko} \mathrm{d}\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{v}' = \int_V \operatorname{rot} \boldsymbol{v}'\,\mathrm{d}V + \oint_{F_\mathrm{k}} \mathrm{d}\boldsymbol{F}_\mathrm{k} \times \boldsymbol{v}', \tag{2.18}$$

da das Flüssigkeitsvolumen $\mathrm{d}V$ von der Kontrollfläche Ko und der Körperoberfläche F_k abgegrenzt wird, wobei $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_\mathrm{k}$ vom Körper in die Flüssigkeit weist. Ist die Strömung in V drehungsfrei, so ergibt sich auf jeder Integrationsfläche dieselbe Zirkulation $\vec{\Gamma}$.

Wie bisher ist der Drehungssinn der Integrationswege zur Berechnung der Komponenten von $\vec{\Gamma}$ dann positiv, wenn die einzelne Vektorkomponente mit der zugehörigen positiven Koordinatenrichtung eine Rechtsschraube bildet (bei positiv orientiertem, rechtsgewundenen Koordinatensystem xyz). Dann wird die Kraft, die die Flüssigkeit auf den Körper ausübt

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_{\mathrm{Fl\,auf\,K\ddot{o}}} &= -\boldsymbol{H}_\mathrm{F} = \int_{Ko} \varrho \vec{U} \times [\mathrm{d}\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{v}'] - \int_{Ko} \varrho \vec{U} (\boldsymbol{v}' \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{F}) \\ &= \varrho_\infty \vec{U} \times \vec{\Gamma} - \varrho_\infty \vec{U} Q.\end{aligned} \tag{2.18}$$

Analog ergibt sich das Haltemoment aus dem Flächensatz:

$$\boldsymbol{M}_\mathrm{F} = \int \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{r} \times \varrho \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V + \int p\,\boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{F} + \int \varrho [\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}](\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{F}). \tag{2.19}$$

Das entgegengesetzte Moment, das die Flüssigkeit auf den Körper in stationärer Parallelströmung ausübt, wird daher

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{Fl\,auf\,K\ddot{o}}} = -\boldsymbol{M}_\mathrm{F} = \int \boldsymbol{r} \times [\vec{U} \times [\mathrm{d}\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{v}']] - \int \varrho [\boldsymbol{r} \times \vec{U}](\boldsymbol{v}'\,\mathrm{d}\boldsymbol{F}). \tag{2.20}$$

Leider lassen sich diese Integrale nicht mehr so leicht anschaulich deuten wie die für die Kräfte.

Bei stationären Bewegungen übt eine reibungslose Flüssigkeit auf einen undurchlässigen Körper (mit $Q = 0$) nur wattlose Kräfte quer zur Bewegungsrichtung und Momente aus, aber keinen Widerstand W. Das ist energetisch einleuchtend, da ja hier keine Antriebsleistung $W \cdot U$ mechanisch verloren gehen kann. Strömungen mit Energieverlust kann man erst bei Annahme einer Flüssigkeitsreibung rechnerisch verfolgen, durch die Bewegungsenergie in Wärmeenergie umgewandelt und somit mechanisch verloren wird.

Bei vielen Strömungen in Flüssigkeiten kleiner Reibung wirkt sich die Zähigkeit jedoch nur an gewissen Stellen aus; und zwar ist das Wesentliche dann die Neubildung von Wirbeln, also von Zirkulation, in der Nähe von festen Wänden. Nimmt man aber diese Folgeerscheinungen des Zähigkeitseinflusses als gegeben an, so gelingt es manchmal, den sonstigen Strömungsverlauf summarisch doch wieder mit dem einfachen Modell der reibungslosen Flüssigkeit darzustellen und auch einen Widerstand zu berechnen. Beispiele hierfür sind die Kármánsche Wirbelstraße (2.2.1), die Tragflügeltheorie (2.2.10), und die unstetigen Strömungen (2.2.8). In all diesen Fällen reicht aber die Körperstörung in der reibungslosen Flüssigkeit zumindest im Nachlauf des Körpers bis ins Unendliche – im Gegensatz zu der bisherigen Voraussetzung $|v'|/U \to 0$ für $r \to \infty$ –, und die obige Ableitung der Kräfte ist dementsprechend zu erweitern.

Eine weitere, nur scheinbar unwichtige Voraussetzung für das Obige ist die Annahme, daß die Flüssigkeit unbegrenzt ist und somit die Kontrollfläche überall vom Körper ausreichend weit entfernt angenommen werden kann. In räumlich begrenzter Flüssigkeit können nämlich ganz anders geartete Kräfte auftreten. So werden z. B. Körper, die sich in der Nähe einer festen Wand bewegen, von dieser angezogen. Noch schwerer zu überschauende Kräfte entstehen dann, wenn bei der Körperbewegung eine freie Oberfläche der Flüssigkeit deformiert wird, wie bei einem Schiff (auch bei einem nicht zu tief getauchten Unterseeboot). Hier kann man einen Teil des wirklichen Widerstandes, nämlich den Wellenwiderstand, mit dem Modell der reibungslosen Flüssigkeit berechnen, wenn er auch in sehr komplizierter Weise von der Schiffsform und der Fahrgeschwindigkeit U (genauer von der Froudeschen Zahl $Fr = U/\sqrt{gL}$, $L =$ Schiffslänge) abhängt.

2.1.2.3. Körper im Kanal. Das D'Alembertsche Widerstandsparadoxon gilt auch noch für einen Körper in einem geraden Kanal konstanten Querschnitts wie in Fig. 15; die Flüssigkeit sei jetzt als inkompressibel vorausgesetzt. Weit vor und hinter dem Körper ist die Geschwindigkeit gleichförmig verteilt und es ist $u_1 = u_2 =$ const. In der Potentialströmung einer reibungslosen Flüssigkeit gilt – im Gegensatz zur Strömung wirklicher, zäher Flüssigkeiten – **überall** die Bernoulli-Gleichung (1.46): $p_1 + \frac{\varrho}{2} u_1^2 = p_2 + \frac{\varrho}{2} u_2^2$. Dann wird $p_1 = p_2$ und nach dem Impulssatz

$$W = 0 . \qquad (2.21)$$

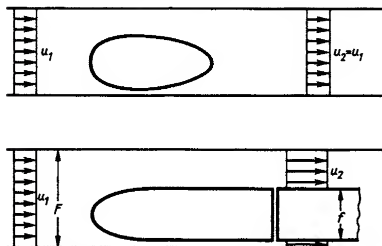


Fig. 15. Körper bzw. Halbkörper im Kanal

Einen endlichen Widerstand in reibungsloser Flüssigkeit kann man jedoch für einen **Halbkörper** im Kanal berechnen; das ist ein zylindrischer Körper, der in einer Richtung unendlich lang ist wie in Fig. 15 unten. Da das Druckintegral um den ganzen Körper ohne eine Aussage über den Druck auf der Rückseite unbestimmt bleibt, denkt man sich den Körper in hinreichender Entfernung vom Kopf durchgeschnitten und

durch einen kleinen Spalt vom restlichen Halbkörper getrennt. Bei dieser Anordnung, die auch experimentell verwirklicht werden kann, ruht die Flüssigkeit im Spalt, und es herrscht dort der gleiche Druck p_2 wie in der Strömung außerhalb des Spalts. Die Stelle 2 liege so weit hinter dem Kopf des Halbkörpers, daß dort Geschwindigkeit u_2 und Druck p_2 über dem Querschnitt $F-f$ zwischen Kanal (F) und Körper (f) konstant geworden sind. Mit dem Versperrungsverhältnis $\alpha = f/F < 1$ lauten dann Kontinuitäts-, Bernoulli- und Impulsgleichung

$$u_1 = (1-\alpha)u_2 \tag{2.22}$$

$$p_1 + \frac{\varrho}{2}u_1^2 = p_2 + \frac{\varrho}{2}u_2^2 \tag{2.23}$$

und

$$W = F(p_1 - p_2) + F\varrho u_1^2 - (F-f)\,\varrho\,u_2^2. \tag{2.24}$$

Eliminiert man die Drucke, so gibt eine kleine Rechnung für den Widerstand

$$W = f\frac{\varrho}{2}u_2^2\alpha = f\frac{\varrho}{2}u_1^2\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}. \tag{2.25}$$

Der Widerstand W des vorderen Teils des Halbkörpers (vom Kopf bis zum Trennspalt) verschwindet also erst in unbegrenzter Strömung $F\to\infty$, $\alpha\to 0$.

Da die Normaldrucke auf das zylindrische Mittelteil zum Widerstand in Strömungsrichtung (x) nichts beitragen, setzt sich dieser zusammen aus der resultierenden Kraft der Drucke p_k am Kopf und der Resultierenden des Unterdrucks p_2 an der Rückseite

$$W = \iint p_\mathrm{k}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - p_2 f. \tag{2.26}$$

Ist u_k die Geschwindigkeit längs des Kopfes, so wird mit $p_\mathrm{k} + (\varrho/2)u_\mathrm{k}^2 = p_2 + (\varrho/2)u_2^2$ und dem eben berechneten Wert für W

$$\iint \frac{\varrho}{2}u_\mathrm{k}^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{\varrho}{2}u_2^2 f(1-\alpha) = \frac{\varrho}{2}u_1^2\frac{f}{1-\alpha}. \tag{2.27}$$

Das Integral des Geschwindigkeitsquadrats am Halbkörperkopf über $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, also über die Projektion des jeweiligen Oberflächenelements auf eine Ebene senkrecht zur Achsenrichtung von Körper und Kanal, ist somit ganz unabhängig von der geometrischen Form des Kopfes.

Auch in wirklichen Flüssigkeiten (kleiner Zähigkeit) entsteht am Vorderteil von sehr langen Körpern – z. B. an einem Zeppelin oder an einem Schiff mit langem parallelen Mittelschiff – fast dieselbe Strömung wie in reibungsloser Flüssigkeit. Ist der Kopf dieser Körper glatt, aber sonst in weiten Grenzen beliebig geformt, so wird daher auch hier, für $\alpha\to 0$, der Druckwiderstand des Vorderteils des Körpers vernachlässigbar klein; der Überdruck in der Nähe des Staupunkts wird also durch Unterdruckgebiete am Kopf gerade kompensiert. Der Widerstand solcher Körper entsteht – abgesehen vom tangentialen Reibungswiderstand am zylindrischen Teil – vor allem am hinteren Teil des Körpers, wo sich die Zähigkeitseinflüsse akkumulieren und zum Abreißen der Strömung führen; dadurch wird hinter dem Körper ein Totwasser mit meist negativem Druck gebildet, der den Körper nach hinten saugt. Die wahren Ursachen des Flüssigkeitswiderstands sind also weit komplizierter, als es den naiven Anschauung entspricht, nach der man die wesentlichen Widerstandsvorgänge in dem Auseinanderdrängen der Stromlinien am Kopf des Körpers vermuten könnte.

2.1.3. Wirbelsätze von Helmholtz und Thomson. Der Kutta-Joukowskische Satz läßt deutlich die Bedeutung der Zirkulation oder der Wirbel auch in reibungslosen Flüssigkeiten erkennen. Die wichtigsten Wirbelsätze hatte bereits H. v. Helmholtz (1821–1894) aufgestellt, ausgehend von einer hydrodynamisch-elektromagnetischen Analogie zwischen Flüssigkeitswirbeln und Drähten, in denen ein elektrischer Strom fließt.

Unter Wirbelbewegungen einer Flüssigkeit versteht man solche, bei denen zumindest an singulären Stellen $\boldsymbol{w} = \text{rot}\,\boldsymbol{v}$ nicht verschwindet. Der Wirbelvektor $\boldsymbol{w}$ kann dabei nicht ganz willkürlich angenommen werden, sondern sein Feld muß überall quellenfrei sein wegen der Identität $\text{div}\,\boldsymbol{w} = \text{div rot}\,\boldsymbol{v} = 0$. Veranschaulicht man das Feld durch Wirbellinien, die dort existieren, wo $\boldsymbol{w} \neq 0$ ist, und die die gleiche Richtung haben wie $\boldsymbol{w}$, so entsprechen daher – auch in einem kompressiblen Medium – diese Wirbellinien den Stromlinien einer quellenfreien Strömung in einer inkompressiblen Flüssigkeit. Ebenso wie solche Stromlinien im Innern einer Flüssigkeit nirgends enden können, wenn keine Quellen oder Senken vorhanden sind, müssen auch Wirbellinien entweder in sich geschlossene Kurven (Wirbelringe) bilden oder bis zum Rand der Flüssigkeit (evtl. ins Unendliche) reichen.

Als einfachstes Wirbelgebilde interessiert besonders die Wirbelröhre, die aus mehreren, nebeneinander liegenden Wirbellinien besteht, während außerhalb der Wirbelröhre überall $\boldsymbol{w}$ verschwindet (Fig. 16). Das Integral von $\boldsymbol{w}$ über die Querschnittsfläche F_Q der Wirbelröhre nennt man Wirbelstärke: $\int \boldsymbol{w}\,\mathrm{d}\boldsymbol{F}_Q$; wegen des Stokesschen Satzes $\int \boldsymbol{w}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{F}_Q = \int \text{rot}\,\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{F}_Q = \oint \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ ist diese örtliche Wirbelstärke gleich der Zirkulation Γ in der Querschnittsebene. (Im Grenzfall verschwindenden Querschnitts F_Q der Wirbelröhre, aber endlichem $\lim\limits_{F_Q\to 0}\int \boldsymbol{w}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{F}_Q$ spricht man von einem Wirbelfaden.) Der Stokessche Satz, angewandt auf eine besondere geschlossene Fläche – nämlich auf zwei Querschnitte 1 und 2 und den Mantel der Röhre zwischen ihnen – gibt aber weiterhin: $\int \text{rot}\,\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{F} = 0 = \Gamma_2 - \Gamma_1 + \int \text{rot}\,\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\text{Mantel}}$; das letzte Integral verschwindet, da keine Wirbellinie den Mantel schneidet, und dort $\boldsymbol{w}$ und $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ aufeinander senkrecht stehen. Es wird also $\Gamma_2 = \Gamma_1$; d. h. die Wirbelstärke oder Zirkulation ist konstant längs der ganzen Wirbelröhre. Da die Strömung außerhalb der Wirbelröhre drehungsfrei sein soll, kann deren Zirkulation auf einer beliebigen Raumkurve bestimmt werden, die die Röhre einmal umschlingt. Wie bereits erwähnt, kann aus kinematischen Gründen die Wirbelröhre im Innern der Flüssigkeit nirgends anfangen oder enden.

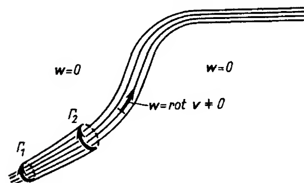


Fig. 16. Wirbelröhre

Die Wirbelstärke ist aber nun nicht nur längs der Röhre konstant, sondern bleibt sogar auch zeitlich unveränderlich, wie Helmholtz für die ihn interessierenden inkompressiblen Flüssigkeiten gezeigt hat. W. Thomson (Lord Kelvin

1824–1907) bewies diesen dynamischen Fundamentalsatz dann allgemeiner auch für kompressible, reibungslose Medien in der folgenden Weise. Man untersucht die substantielle, zeitliche Änderung von Γ, also $\mathrm{d}\Gamma/\mathrm{d}t$, längs einer massenfesten Raumkurve, einer sogenannten flüssigen Linie. Dazu ist das Zirkulationsintegral zu den Zeiten t und $t + \mathrm{d}t$ zu bilden, und zwar längs der gleichen Flüssigkeitsteilchen, die eine geschlossene Kurve bilden und sich in der Zeit $\mathrm{d}t$, entsprechend den Euler-Gleichungen im Raum weiterbewegt haben. Zunächst gilt:

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oint \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \oint \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathrm{d}\boldsymbol{s}) \right). \tag{2.28}$$

Das Element $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ des Integrationsweges hat sich nun in der Zeit $\mathrm{d}t$ deshalb geändert, weil seine flüssigen Endpunkte zur Zeit t verschiedene Geschwindigkeit hatten und sich in $\mathrm{d}t$ um $\boldsymbol{v}\mathrm{d}t$ bzw. $(\boldsymbol{v} + \partial \boldsymbol{v}/\partial s \cdot \mathrm{d}s)\mathrm{d}t$ weiterbewegt haben; $\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{s})/\mathrm{d}t$ bedeutet daher $\partial \boldsymbol{v}/\partial s \cdot \mathrm{d}s$ zur Zeit t, und es wird

$$\int \boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathrm{d}\boldsymbol{s}) = \int \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial s} \mathrm{d}s = \int \operatorname{grad} \frac{\boldsymbol{v}^2}{2} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

Die substantielle Beschleunigung $\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ andrerseits kann man nach der Euler-Gleichung (1.43) durch den Gradienten der Druckfunktion $P = \int \mathrm{d}p/\varrho$ und des Kräftepotentials U ausdrücken, so daß insgesamt wird:

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = \oint \operatorname{grad} \left(-P + U + \frac{\boldsymbol{v}^2}{2} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}. \tag{2.29}$$

(Im Integrand steht übrigens ein anderer Ausdruck als in der Bernoulli-Gleichung!) Offenbar ist für ein Integral zwischen zwei Raumpunkten A und B ganz allgemein

$$\int_A^B \operatorname{grad} \varphi \, \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_A^B \frac{\partial \varphi}{\partial s} \mathrm{d}s = (\varphi)_B - (\varphi)_A.$$

Ein Umlaufintegral über einen Gradienten, für das der Endpunkt in den Anfangspunkt fällt: $B \to A$, verschwindet also sicher, solange die Funktionen im Integranden eindeutig sind. Für das Geschwindigkeitsquadrat $\boldsymbol{v}^2$ trifft das offensichtlich zu, ebenso für die Druckfunktion, solange ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Druck und Dichte besteht. (Die nicht verschwindende Zirkulationsänderung bei nicht-barotroper, inhomogener Luftschichtung läßt sich nach einem Satz von V. Bjerknes berechnen, der für die Meteorologie sehr wichtig ist.) Wenn schließlich auch das Kräftepotential eindeutig ist, wird

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{2.30}$$

Oder in Worten: **Unter der Wirkung von konservativen, äußeren Kräften bleibt in barotroper und reibungsloser Flüssigkeit die Zirkulation längs einer geschlossenen, flüssigen Linie zeitlich konstant.**

Auf Wirbelröhren angewandt folgt daraus, daß diese dauernd aus den gleichen Flüssigkeitsteilchen bestehen. Denkt man sich nämlich kleine geschlossene

flüssige Linien dicht neben der Wirbelröhre ($\boldsymbol{w} = 0$) und andere in ihrem Innern ($\boldsymbol{w} \neq 0$), so bleibt deren jeweilige Zirkulation zeitlich konstant; es findet also am Mantel der Röhre kein Vermischen von drehungsfreien und drehenden Flüssigkeitsteilchen statt. Das gilt natürlich auch dann, wenn die Wirbelröhre deformiert oder weiterbewegt wird. Da übrigens die Energie in der Wirbelröhre klein ist verglichen mit der Energie der Potentialströmung, die sie umgibt, ist die Eigenbewegung eines Wirbels leicht von außen zu beeinflussen (z. B. durch leichte Handbewegungen beim Ausflußwirbel in einer Badewanne, dessen Kern allerdings aus Luft besteht). Wird eine Wirbelröhre dabei gestreckt und damit ihr Querschnitt verkleinert, so erhöht sich in ihr die Drehung rot $\boldsymbol{v}$, da ja nur das Querschnittsintegral $\int \text{rot}\, \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{F}_Q = \Gamma$ immer gleich groß bleibt.

Im Gegensatz zur reibungslosen Flüssigkeit kann sich in einer (homogenen und inkompressiblen) zähen Flüssigkeit eine zeitliche Zirkulationsänderung durch die dort auftretenden Schubspannungen ergeben. Mit der Beschleunigung $d\boldsymbol{v}/dt$ nach der Navier-Stokesschen Gleichung (1.79) erhält man statt Gl. (2.30) hier

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\nu \oint \text{rot rot}\, \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s}\,. \tag{2.31}$$

In der Regel entsteht Drehung in der Grenzschicht an festen umströmten Wänden ($d\Gamma/dt > 0$), also am Rand des Strömungsgebiets. Im Innern einer Strömung bewirkt die Flüssigkeitsreibung dagegen, daß die dort vorhandene Drehung örtlich allmählich auf größere Gebiete verteilt (verschmiert) wird und dabei zeitlich abklingt; über diese Wirbeldiffusion vgl. (3.32).

2.1.4. Strömungsfelder inkompressibler, reibungsloser Flüssigkeiten; Biot-Savartsches Gesetz. Ein Hauptergebnis des Abschnitts 2.1.2 ist der enge Zusammenhang zwischen Quellergiebigkeit und Zirkulation einer Strömung mit den Flüssigkeitskräften auf einen festen Körper. Das erscheint zunächst überraschend; denn andererseits ist ja nach der Kontinuitätsgleichung die Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit normalerweise quellenfrei (div $\boldsymbol{v} = 0$) und bei verschwindender Zähigkeit außerdem noch drehunsgfrei (rot $\boldsymbol{v} = 0$), so daß scheinbar nur in Ausnahmefällen Körperkräfte möglich sind. Der Widerspruch löst sich jedoch, wenn man das fremde Element in dieser Betrachtung, nämlich den festen Körper, eliminiert und sich diesen ersetzt denkt durch eine Strömung im Körperinnern von Flüssigkeit derselben Art, wie sie um den Körper herumfließt. Denn die Darstellung dieser Innenströmung gelingt nur durch die Annahme von Singularitäten, die man als hydrodynamisches Bild des Körpers bezeichnet. Man erreicht dadurch, daß dann der ganze Raum einheitlich als Strömungsgebiet aufgefaßt werden kann.

Ein Brückenpfeiler z. B. zerteilt und verdrängt das Flußwasser an seinem Kopf nach den Seiten ebenso, wie es eine starke Quelle (oder Verteilung von Quellen) dort bewirken würde; entsprechend könnte man das Heck des Pfeilers durch eine gleichstarke Senke ersetzen. Es ergäben sich dann zwei Strömungen: außen das sich teilende und wieder zusammenfließende Flußwasser und innen das Wasser, das aus der Quelle zunächst nach allen Seiten herausfließt und nach verschieden langen Wegen schließlich vollständig in der Senke verschwindet; diejenige Stromlinie, die beide Strömungen trennt, entspräche dabei dem Umriß des Pfeilerquerschnitts. Die Kräfte und Momente des Flußwassers auf den

Pfeiler lassen sich nun als diejenigen auf die Singularitäten (Quellen, Senken usw.) berechnen, die sein hydrodynamisches Bild sind. So sieht ein Aerodynamiker in einem Unterschallflugzeug im Wesentlichen eine Quellsenkenverteilung für den Rumpf und ein Wirbelsystem für die auftrieberzeugenden Tragflächen.

Daß gerade Quellen und Wirbel die wesentlichen Singularitäten des Geschwindigkeitsfeldes einer Strömung bilden, geht auch schon aus folgendem allgemeinen Satz hervor: Jedes stetige Vektorfeld $\boldsymbol{v}$ in einem einfach zusammenhängenden Bereich ist eindeutig bestimmt, wenn im Innern überall div $\boldsymbol{v}$ und rot $\boldsymbol{v}$ und auf dem Rand die Normalkomponente v_n von $\boldsymbol{v}$ bekannt sind. Um diesen analytischen Satz für ein beliebiges Vektorfeld möglichst wirksam auf die Kinematik von Strömungen anwenden zu können, beschränken wir uns im folgenden auf stationäre Strömungen in inkompressiblen Flüssigkeiten und identifizieren den Vektor mit der Geschwindigkeit.

Der Beweis des Satzes folgt aus der Konstruierbarkeit des Feldes $\boldsymbol{v}$ aus seiner Quell- und Wirbelverteilung. Zunächst zur Eindeutigkeit der Lösung: angenommen, bei gegebenen div $\boldsymbol{v}$, rot $\boldsymbol{v}$ und v_n gibt es zwei Lösungen $\boldsymbol{v}_{\text{I}}$ und $\boldsymbol{v}_{\text{II}}$, so gilt für die Differenz $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}_{\text{I}} - \boldsymbol{v}_{\text{II}}$ überall $\operatorname{div} \boldsymbol{v}_0 = 0$ und $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}_0 = 0$, und es existiert ein Potential Φ_0, so daß $\boldsymbol{v}_0 = \operatorname{grad} \Phi_0$, mit $\operatorname{div} \boldsymbol{v}_0 = \Delta\Phi_0 = 0$ im Innern und $\partial\Phi_0/\partial n = v_{n0} = v_{n1} - v_{n2} = 0$ am Rand. Setzt man im Gaußschen Satz $\int \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, dV = \oint \mathrm{d}\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{A}$ speziell $\boldsymbol{A} = \Phi_0 \operatorname{grad} \Phi_0$, so folgt daraus eine Sonderform des Greenschen Satzes, nämlich

$$\int [\Phi_0 \Delta\Phi_0 + (\operatorname{grad} \Phi_0)^2]\, \mathrm{d}V = \oint \mathrm{d}\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}_0 \Phi_0 = \oint \Phi_0 v_{n0}\, \mathrm{d}F = 0; \tag{2.32}$$

also wird wegen $\Delta\Phi_0 = 0$ auch überall $(\operatorname{grad} \Phi_0)^2 = \boldsymbol{v}_0^2 = 0$ oder $\boldsymbol{v}_{\text{I}} = \boldsymbol{v}_{\text{II}}$.

Im folgenden beschränken wir uns auf ein unbegrenztes Feld mit konstanter Parallelströmung im Unendlichen: $\boldsymbol{v}_{\text{I}} = \boldsymbol{v}_{\text{II}} = \boldsymbol{v}_\infty$ und $\boldsymbol{v}_0 = 0$ dort; die einzige, im Endlichen wie im Unendlichen reguläre, Potentialfunktion ist aber die Konstante $\Phi_0 = c$, woraus wieder $\boldsymbol{v}_0 = 0$ oder $\boldsymbol{v}_{\text{I}} = \boldsymbol{v}_{\text{II}}$ im ganzen Feld folgt.

Zunächst betrachten wir nun das überall drehungsfreie Feld mit $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$, in dem $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = q$ eine gegebene Funktion des Ortes ist; dann existiert ein Potential Φ mit $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \Phi$, für das gelten soll $\Delta\Phi = q$. Dieses Potential kann man fast immer aus einer Formel ableiten, die eine Verallgemeinerung derjenigen für die Punktquelle (vgl. Abschnitt 1.34) darstellt:

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_V \frac{1}{r} q(\xi, \eta, \zeta)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}\zeta. \tag{2.33}$$

Dabei ist r der Abstand des Aufpunktes $P(x,y,z)$ von dem Punkt $P'(\xi,\eta,\zeta)$, in dem sich eine Quelle der Ergiebigkeit $q\,\mathrm{d}V$ befindet, also $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$. Ferner soll über ein Volumen V integriert werden, daß alle Raumstellen mit $q \neq 0$ enthält.

Daß dieses Integral (unter der Voraussetzung der Existenz einer Lösung Φ) die Eigenschaften des gesuchten Potentials hat, folgt aus einem Spezialfall des

Greenschen Satzes, wenn man im Gaußschen Integralsatz [Gl. (1.24)] speziell einsetzt:

$$A = \frac{1}{r}\operatorname{grad}\Phi - \Phi\operatorname{grad}\frac{1}{r}.$$

Dann wird aus $\int \operatorname{div} A\,\mathrm{d}V = \oint A\cdot \mathrm{d}F$ jetzt

$$\int\left(\frac{1}{r}\Delta\Phi - \Phi\Delta\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V = \int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\frac{\partial 1/r}{\partial n}\right)\mathrm{d}F, \tag{2.34}$$

mit n = äußere Normale der Fläche F, die das Integrationsvolumen V begrenzt. In V ist nun $\Delta 1/r = 0$, solange $r > 0$ gilt. Schließt man den singulären Punkt $r = 0$ zunächst durch eine kleine Kugel K_ε mit dem Radius $\varepsilon > 0$ aus, so entspricht daher das Volumenintegral in Gl. (2.34) bis auf den Faktor $-1/4\pi$ der rechten Seite von Gl. (2.33) mit $q = \Delta\Phi$. Das nach Gl. (2.34) gleichwertige Flächenintegral ist aber jetzt nicht nur auf der äußeren Begrenzungsfläche F_∞ von V, die man zur Vereinfachung der Rechnung ins Unendliche verlegen kann, zu bilden, sondern auch noch über die Fläche F_ε der Kugel K_ε. Vom Integrationsraum aus gesehen ist die äußere Normale auf F_ε entgegengesetzt gerichtet zu $\boldsymbol{r}$, so daß $\partial/\partial n = -\partial/\partial r$. Mit dem räumlichen Winkel Ω wird hier $\mathrm{d}F = r^2\mathrm{d}\Omega$, und man kann das Potential Φ auf der kleinen Kugelfläche F_ε durch seinen Wert im Punkt $P(x,y,z)$ selbst ersetzen. Dann wird im Grenzfall $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_{F_\varepsilon}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\frac{\partial 1/r}{\partial n}\right)\mathrm{d}F = \int\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \Phi(x,y,z)\frac{1}{r^2}\right)r^2\,\mathrm{d}\Omega = -4\pi\Phi, \tag{2.35}$$

da $r\partial\Phi/\partial r \to 0$ für $r = \varepsilon \to 0$ bei stetigem, differenzierbaren Potential Φ. Da bereits dieses Flächenintegral den geforderten Wert $-4\pi\Phi$ ergibt, kann die Gl. (2.33) nur dann gelten, wenn das Integral über F_∞ verschwindet, d. h. wenn

$$\int\limits_{F_\infty}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\frac{\partial 1/r}{\partial \eta}\right)\mathrm{d}F = \int\limits_{F_\infty}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial n}(r\Phi)\mathrm{d}F = 0.$$

Das ist insbesondere dann der Fall, wenn sämtliche Quellstellen mit $\Delta\Phi = q \neq 0$ im Endlichen liegen. Denn auf einen weit entfernten Aufpunkt wirken dann diese Stellen zusammen wie eine Punktquelle mit der Ergiebigkeit $\int q\,\mathrm{d}V$, und deren Potential klingt wie $1/r$ ab.

Dagegen läßt sich z. B. das Potential $\Phi = a(x^2 + y^2 - 2z^2)$ nicht durch eine solche Quellverteilung nach Gl. (2.33) darstellen, denn das Flächenintegral über F_∞ verschwindet hierfür nicht, sondern wird sogar unendlich. Hier ist im Endlichen überall $\Delta\Phi = 0$, aber im Unendlichen wird das Potential singulär mit unendlichen Geschwindigkeiten $\partial\Phi/\partial x$ usw.

Für die Tragflügeltheorie (vgl. 2.2.10.2) ist schließlich ein Fall von Bedeutung, bei dem die Singularitäten vom Endlichen ins Unendliche reichen und trotzdem das Integral über F_∞ verschwindet, und die Darstellung Gl. (2.33) zutrifft.

Für das andere, das überall quellenfreie Feld mit $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$, aber gegebener Verteilung der Drehung $\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$, existiert ein Vektorpotential $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}A_x + \boldsymbol{j}A_y + \boldsymbol{k}A_z$, so daß $\boldsymbol{v} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ und

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \Delta\boldsymbol{A} = \boldsymbol{w}. \tag{2.36}$$

Da $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ als skalarer Operator nicht auf einen Vektor angewandt werden kann, ist der Ausdruck $\Delta \boldsymbol{A}$ zunächst sinnlos. Im Gegensatz zu korrekten Vektorgleichungen, deren Komponenten man in beliebigen Koordinatensystemen (z. B. Kugel- oder Zylinderkoordinaten) verifizieren kann, gilt diese obige Transformation von rot rot $\boldsymbol{A}$ auch nur in cartesischen Koordinaten. Und zwar wird diese Formel durch Ausdifferenzieren nach x, y und z dann bestätigt, wenn man unter $\Delta \boldsymbol{A}$ versteht: $\boldsymbol{i}\Delta A_x + \boldsymbol{j}\Delta A_y + \boldsymbol{k}\Delta A_z$. Nimmt man nun an, daß die gesuchte Lösung $\boldsymbol{A}$ bei gegebener Verteilung noch die Nebenbedingung grad div $\boldsymbol{A} = 0$ erfüllt, so gilt für die x-, y- und z-Komponenten von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{w}$ die gleiche Poisson-Gleichung wie für Φ und $-q$ beim drehungsfreien Feld, nämlich $\Delta \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{w}$, und es wird analog zur dortigen Lösung

$$\boldsymbol{A}(x, y, z) = \iiint \frac{\boldsymbol{w}(\xi, \eta, \zeta)}{4\pi r}\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}\zeta\,. \tag{2.37}$$

Diese Lösung erfüllt tatsächlich die eben vorausgesetzte Nebenbedingung. Denn wegen $\Delta \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{w}$ wird $\operatorname{div} \Delta \boldsymbol{A} = \Delta \operatorname{div} \boldsymbol{A} = -\operatorname{div} \boldsymbol{w} = -\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$, also $\Delta \operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$ überall; da nun eine Konstante C die einzige im ganzen Raum reguläre Potentialfunktion (mit $\Delta C = 0$) ist, muß hier div $\boldsymbol{A}$ = const und somit grad div $\boldsymbol{A} = 0$ gelten.

Das allgemeine Geschwindigkeitsfeld mit div $\boldsymbol{v} = q$ und rot $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ ergibt sich schließlich durch vektorielle Überlagerung beider Felder

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \boldsymbol{A}, \tag{2.38}$$

wobei das skalare Potential Φ und das vektorielle Potential $\boldsymbol{A}$ nach den Gleichungen (2.33) und (2.37) zu ermitteln sind.

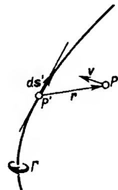


Fig. 17. Zum Geschwindigkeitsfeld eines Wirbelfadens

Die Punktquelle (oder Senke) ist die einfachste drehungsfreie Strömung, die – von einem einzigen Punkt abgesehen – auch quellenfrei ist. Ein gewisses Analogon hierzu stellt die Strömung eines isolierten Wirbelfadens dar, die überall quellenfrei ist und in der nur auf einer geschlossenen oder ins Unendliche reichenden Raumkurve (nämlich dem Wirbelfaden) die Rotation rot $\boldsymbol{v}$ nicht verschwindet. Zur Berechnung dieses Strömungsfeldes ersetzen wir in der allgemeinen Formel für das Vektorpotential das Volumenelement durch $\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta = \delta F\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}'$, wo δF der Querschnitt des Fadens und $\mathrm{d}\boldsymbol{s}'$ das Element seiner Bogenlänge sind, und bezeichnen den Grenzwert für $\delta F \to 0$ wieder: $\lim \boldsymbol{w}\,\delta F\,\mathrm{d}s' = \Gamma\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}'$ (s. Fig. 17). Denn, so wie in einer ebenen Strömung, etwa in xy-Ebenen (z = const), der Vektor rot $\boldsymbol{v}$ in die dazu senkrechte z-Richtung weist, hat hier der Vektor $\boldsymbol{w}\,\delta F$ die zum Fadenquerschnitt senkrechte Richtung, also die des Bogenelements $\mathrm{d}\boldsymbol{s}'$. Nach dem Helmholtzschen Wirbelsatz ist ferner Γ = const längs des ganzen Fadens anzusetzen. Dann wird jetzt aus Gl. (2.37)

$$\boldsymbol{A} = \frac{\Gamma}{4\pi}\int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}'}{r} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{v} = \frac{\Gamma}{4\pi}\operatorname{rot}\int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}'}{r}\,. \qquad \text{(2.39) und (2.40)}$$

$\boldsymbol{v}$ ist die Geschwindigkeit im Aufpunkt $P(x,y,z)$; Punkte auf dem Faden seien mit $P'(\xi,\eta,\zeta)$ bezeichnet, so daß wieder $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$ und

$d\boldsymbol{s}' = \boldsymbol{i}d\xi + \boldsymbol{j}d\eta + \boldsymbol{k}d\zeta$. Da das Zeichen rot Differentiationen nach den Aufpunktskoordinaten x, y und z bedeutet, von denen $d\boldsymbol{s}'$ nicht abhängt, kann man weiter umformen: $\boldsymbol{v} = (\Gamma/4\pi)\int \mathrm{rot}(d\boldsymbol{s}'/r)$. Aus demselben Grund verschwindet in $\mathrm{rot}\,(d\boldsymbol{s}'/r) = (1/r)\,\mathrm{rot}\,d\boldsymbol{s}' + \mathrm{grad}\,(1/r) \times d\boldsymbol{s}'$ das erste Glied, und man erhält mit $\mathrm{grad}\,1/r = -\,\boldsymbol{r}/r^3$ schließlich

$$\boldsymbol{v} = \frac{\Gamma}{4\pi}\int \mathrm{rot}\,\frac{d\boldsymbol{s}'}{r} = \frac{\Gamma}{4\pi}\int \mathrm{grad}\,\frac{1}{r} \times d\boldsymbol{s}' = \frac{\Gamma}{4\pi}\int \frac{d\boldsymbol{s}' \times \boldsymbol{r}}{r^3}\,. \tag{2.41}$$

Insbesondere wird danach für einen geraden, unendlichen Wirbelfaden, der z. B. mit der z-Achse zusammenfalle, $d\boldsymbol{s}' = \boldsymbol{k}d\zeta$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}(z-\zeta)$, $d\boldsymbol{s}' \times \boldsymbol{r} = (-\boldsymbol{i}y + \boldsymbol{j}x)d\zeta$ und für $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}u + \boldsymbol{j}v$:

$$u = -\,\frac{\Gamma}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\,d\zeta}{[x^2 + y^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}} = -\,\frac{\Gamma y}{2\pi(x^2 + y^2)}$$

$$v = \frac{\Gamma x}{2\pi(x^2 + y^2)}\,. \tag{2.42}$$

Alle Flüssigkeitsteilchen bewegen sich hier auf Kreisbahnen um den Faden (bei $x = y = 0$) entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn mit der Geschwindigkeit $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{u^2 + v^2} = \Gamma/2\pi r$. Auf allen solchen Kreisbahnen wird die Zirkulation, mit α = Zentriwinkel,

$$\oint \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\Gamma}{2\pi r}\, r\, d\alpha = \Gamma. \tag{2.43}$$

Die Gleichung (2.41) ist in der Elektrodynamik als Biot-Savartsches Gesetz wohl bekannt. Zwischen einem Wirbelfaden in inkompressibler Flüssigkeit und einem stromdurchflossenen Draht besteht demnach eine völlige Analogie: die Zirkulation entspricht der Stromstärke und die Strömungsgeschwindigkeit der magnetischen Feldstärke nach Richtung und Größe.

2.2. Potentialströmungen idealer Flüssigkeiten

2.2.1. Geschwindigkeitspotential. In einer reibungslosen Flüssigkeit können keine Schubspannungen an den Flüssigkeitsteilchen auftreten; deren Drehung bleibt daher hier unverändert. Insbesondere bleiben Strömungen, die aus dem Ruhezustand erzeugt werden, in der Regel auch für alle Zeiten drehungsfrei. Das folgt aus dem Thomsonschen Satz, angewandt auf infinitesimale flüssige Linien im Flüssigkeitsinnern. Einschränkungen und Ausnahmen werden später unter 2.2.8.1 behandelt.

In einer drehungsfreien Strömung, in der also – abgesehen von singulären Stellen – $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = 0$ gilt, existiert nun wegen der allgemeinen Identität $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\Phi = 0$ ein Geschwindigkeitspotential $\Phi(x,y,z,t)$, mit $\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\,\Phi$. Ist die Flüssigkeit nicht nur reibungsfrei, sondern auch inkompressibel, so folgt aus ihrer

Kontinuitätsgleichung div $\boldsymbol{v} = 0$ sofort $\Delta\Phi = 0$. Jede **harmonische** Funktion Φ (d. h. jede Funktion Φ, für die $\Delta\Phi$ verschwindet) kann somit als Geschwindigkeitspotential einer Strömung in idealer Flüssigkeit aufgefaßt werden, wenn sie noch die zugehörigen Randbedingungen erfüllt. Z. B. kann an der Wand eines festen Körpers keine Flüssigkeit einströmen oder ausfließen, weshalb dort die Normalgeschwindigkeit $\partial\Phi/\partial n$ verschwinden muß, (n in Richtung der Normalen zur Körperoberfläche).

Die Einführung eines Geschwindigkeitspotentials bringt nun eine starke Vereinfachung der Theorie mit sich: statt der drei nichtlinearen Euler-Gleichungen (1.43) für die Geschwindigkeitskomponenten hat man nur noch eine Gleichung für die eine skalare Funktion $\Phi(x,y,z,t)$. Deren Feldgleichung ist überdies linear, so daß auch jede Linearkombination von harmonischen Funktionen: $\sum c_\nu \Phi_\nu$ wieder ein Geschwindigkeitspotential darstellt, während sich die einzelnen Geschwindigkeitsbeiträge vektoriell addieren $\boldsymbol{v} = \sum c_\nu \boldsymbol{v}_\nu = \sum c_\nu \operatorname{grad} \Phi_\nu$. Da ferner harmonische Funktionen auch sonst in der Physik öfters auftreten, z. B. in der Elektrostatik und in der Optik, ist ihre mathematische Theorie sehr weitgehend entwickelt worden. Potentialströmungen idealer Flüssigkeiten sind deshalb bis in die Einzelheiten erforscht worden und bilden das Hauptthema der klassischen Hydrodynamik, über die das Standardwerk von H. Lamb einen guten Überblick gibt.

Beim Vergleich von Strömungen wirklicher Flüssigkeiten mit solchen Potentialströmungen ist allerdings stets zu bedenken, daß es sich dabei um laminare, regelmäßige Bewegungen einer völlig reibungslosen Modellflüssigkeit handelt, die insbesondere an festen Wänden nicht haftet, sondern im allgemeinen daran entlanggleitet.

2.2.2. Ebene Potentialströmungen idealer Flüssigkeiten. Wie schon gezeigt worden ist, sind ebene Strömungen inkompressibler Flüssigkeiten kinematisch besonders einfach zu überschauen, da man hier eine Stromfunktion $\Psi(x,y,t)$ einführen kann. Ist die Strömung außerdem noch drehungsfrei, so daß auch ein Potential $\Phi(x,y,t)$ existiert, so gilt für die Geschwindigkeitskomponenten gleichzeitig

$$u = \frac{\partial\Psi}{\partial y} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \tag{2.44}$$

$$v = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial y}\,. \tag{2.45}$$

Die Kontinuitätsgleichung fordert div $\boldsymbol{v} = \Psi_{yx} - \Psi_{xy} = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0$, und die Bedingung für die Drehungsfreiheit lautet hier rot $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{k}(v_x - u_y) = -\boldsymbol{k}(\Psi_{xx} + \Psi_{yy}) = \boldsymbol{k}(\Phi_{yx} - \Phi_{xy}) = 0$. Dort, wo die Strömung quellen- und drehungsfrei sein soll, müssen also Ψ und Φ zweimal stetig differenzierbar sein und beide die Laplace-Gleichung erfüllen.

Bildet man die Gradienten von Φ und Ψ: grad $\Phi = \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}u + \boldsymbol{j}v$ und grad $\Psi = -\boldsymbol{i}v + \boldsymbol{j}u$, so sieht man, daß diese senkrecht aufeinander stehen (da grad $\Phi \cdot$ grad $\Psi = -uv + uv = 0$), solange die Geschwindigkeit weder unendlich groß wird (u oder $v \to \infty$) noch verschwindet (Staupunkt $u = v = 0$). Daher bilden die Kurvenscharen $\Phi = \text{const}$ und $\Psi = \text{const}$ in der xy-Ebene zu jedem

Zeitpunkt ein orthogonales Netz. Wegen $|\text{grad}\,\Phi| = |\text{grad}\,\Psi| = |\boldsymbol{v}|$ ist dieses Netz dann quadratisch, wenn die Intervalle zwischen den Φ- und Ψ-Werten benachbarter Kurven gleich groß und hinreichend klein sind, so daß die örtliche Krümmung der Potentiallinien (Φ = const) und der Stromlinien (Ψ = const) vernachlässigbar ist.

Für den hier besonders einfachen Zusammenhang zwischen Φ und Ψ findet man nun ein Analogon in der Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen $z = x + \mathrm{i}y$, mit $\mathrm{i}^2 = -1$; Real- und Imaginärteil $\mathbf{R}(x,y)$ und $\mathbf{I}(x,y)$ einer jeden regulären Funktion dieser Variablen $F(z)$ erfüllen nämlich dieselben Gleichungen (2.44) und (2.45) wie Φ und Ψ. Denn mit $\partial z/\partial x = 1$, $\partial z/\partial y = \mathrm{i}$ und $F' = \mathrm{d}F/\mathrm{d}z$ folgt aus $F(z) = \mathbf{R}(x,y) + \mathrm{i}\,\mathbf{I}(x,y)$ durch partielle Differentiation nach x oder y:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F' \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = F' = \frac{\partial R}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial x} \tag{2.46}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = F' \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \mathrm{i}F' = \frac{\partial R}{\partial y} + \mathrm{i}\,\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial y}\,. \tag{2.47}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit i und vergleicht mit der zweiten, so wird

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial y} \tag{2.48}$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} = -\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial x}\,. \tag{2.49}$$

Man kann also bei jeder (regulären) Funktion $F(z)$ den Realteil als Potential Φ und den Imaginärteil als Stromfunktion Ψ einer ebenen Strömung in idealer Flüssigkeit deuten. Die hydrodynamische Bedeutung der Ableitung $F'(z)$ folgt dann aus

$$F(z) = \Phi(x, y) + \mathrm{i}\Psi(x, y) \tag{2.50}$$

$$F'(z) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = u(x, y) - \mathrm{i}v(x, y)\,. \tag{2.51}$$

Die Ableitung F' entspricht also nicht direkt der Geschwindigkeit $u + \mathrm{i}v$ in der Gaußschen Ebene, sondern ihrem konjugiert komplexen Wert $u - \mathrm{i}v$.

Die Analogie bleibt auch für instationäre Strömungen bestehen, wenn F außer von z noch der Zeit t abhängt: $F(z,t)$; man erhält dann jeweils das momentane Strömungsfeld zur Zeit t. Ist dieses bekannt, so kann man schließlich den statischen Druck $p(x,y,t)$ aus der Bernoulli-Gleichung (1.45) berechnen: $\partial\Phi/\partial t + p/\varrho + v^2/2 - U = f(t)$.

Mit funktionstheoretischen Hilfsmitteln ist nun z. B. das Umströmungsproblem eines vorgegebenen Körpers in einer Parallelströmung mathematisch im Prinzip eindeutig lösbar. Hier soll jedoch nur der leichtere, umgekehrte Weg begangen werden, daß wir einige einfache Funktionen für $F(z)$ annehmen und feststellen, welchen Strömungen sie entsprechen. So wird z. B. durch $F(z) = az^2$, wobei a reell sein möge, eine ebene Staupunktsströmung dargestellt (vgl. Fig. 18). Hier wird $F = a(x^2 - y^2) + \mathrm{i}\,2axy$ und $F' = u - \mathrm{i}v = 2az = 2ax + \mathrm{i}\,2ay$; Potential- und Stromlinien sind orthogonale Hyperbeln $\Phi = a(x^2 - y^2) = \text{const}$ bzw.

$\Psi = 2axy = \text{const.}$ (Nur im Staupunkt $x = y = 0$ ist die Orthogonalität verletzt.) Ersetzt man die spezielle Stromlinie $y = 0$ durch eine feste Wand, so wird in der Umgebung des Nullpunktes $x = y = 0$, der hier zugleich Staupunkt ist ($u = v = 0$), eine Strömung senkrecht gegen die Wand $y = 0$ dargestellt. Soweit man einen beliebigen zylindrischen Körper durch seine Tangentialebene im Staupunkt ersetzen kann, wird in dessen nächster Umgebung immer diese Strömung anzutreffen sein. Die Isotachen, das sind die Linien gleichen Geschwindigkeitsbetrages, sind Kreise um den Nullpunkt mit $|\mathfrak{v}| = \sqrt{u^2 + v^2} = 2a\sqrt{x^2 + y^2} = \text{const}$; dasselbe gilt für die Linien gleichen Druckes, die Isobaren, wenn die Strömung stationär ist, wegen $p + \varrho\, \mathfrak{v}^2/2 = \text{const.}$ Man kann sich noch überzeugen, daß für $\Phi = a(x^2 - y^2)$ tatsächlich $\Delta\Phi = 0$ befriedigt wird, ebenso wie für Ψ. Dagegen gibt es keine Funktion $F(z)$, die etwa den Realteil $\Phi_* = a(x^2 + y^2)$ mit $a \neq 0$ hat; denn es ist ja auch $a\Delta(x^2 + y^2) = 4a \neq 0$.

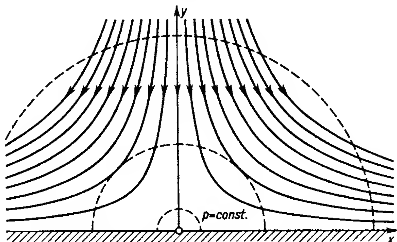
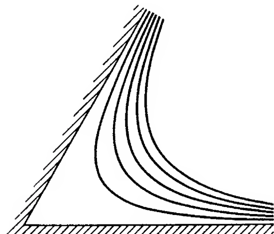
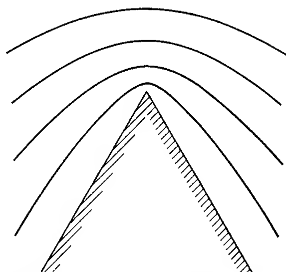


Fig. 18. Ebene Staupunktsströmung ($F = az^2$): Stromlinien und Isobaren

Die allgemeine Potenz $F(z) = az^n$ (a und n reell) gibt – in Polarkoordinaten $z = re^{i\alpha} = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ – als Imaginärteil die Stromfunktion $\Psi = ar^n \sin n\alpha$. Offenbar wird $\Psi = 0$ für $\alpha = 0$, außerdem aber


Fig. 19. Strömung im Winkelraum ($F = az^3$)


Fig. 20. Strömung um eine Ecke ($F = az^{3/5}$)

auch noch für $\alpha = \pm\pi/n, \pm 2\pi/n, \ldots$ bei beliebigem Nullpunktabstand r. Denkt man sich die beiden Strahlen $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi/n$ als feste Begrenzungen, so geben die dazwischen liegenden Stromlinien $\Psi = \text{const} > 0$ die Strömung in einen Winkelraum, wenn $n > 1$ (Fig. 19), oder um eine Ecke, wenn $1/2 < n < 1$ (Fig. 20),

oder um eine Kante, wenn $n = 1/2$. Allerdings wird wegen $F' = u - iv = anz^{n-1}$ die Geschwindigkeit an einer umströmten Ecke ($1/2 \leq n < 1$ und $r \to 0$) unendlich groß und – nach der Bernoulli-Gleichung – der Druck negativ unendlich. Zumindest in der Nähe einer Ecke oder gar einer Kante ist diese Lösung also physikalisch nicht brauchbar. Wirkliche Flüssigkeiten lösen sich dort von der Wand ab und bilden Wirbel; diese Vorgänge können von der obigen Funktion $F(z)$, die im Innern des Strömungsbereichs ($r > 0$) singularitätenfrei ist, nicht beschrieben werden (vgl. 2.2.8.2).

Dem Logarithmus der komplexen Variablen z entspricht die Strömung, die eine Quelle der Ergiebigkeit q im Nullpunkt verursacht: $F(z) = (q/2\pi) \ln z = (q/2\pi) \times$ $\times (\ln r + i\alpha)$, wie bereits in 1.3.4 angegeben; ist q negativ, so erhält man eine

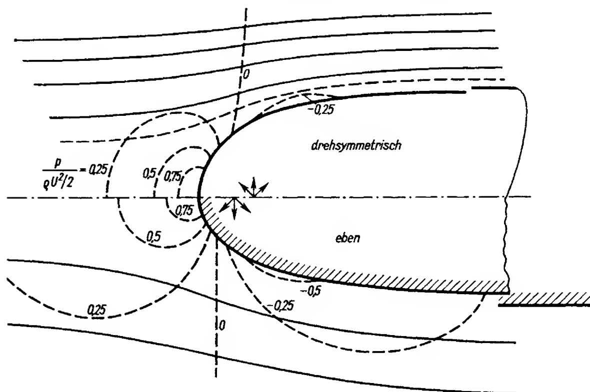


Fig. 21. Halbkörper: drehsymmetrische und ebene Strömung (Stromlinien und Isobaren)

Senke. Vertauscht man Potential- und Stromfunktion, oder wählt man die Konstante q rein imaginär statt reell: $iq = \Gamma$, so stellt jetzt $F(z) = (\Gamma/2\pi i) \ln z$ $= (\Gamma/2\pi)(\alpha - i \ln r)$ die Strömung eines links drehenden Wirbels im Nullpunkt von der Zirkulation Γ dar (vgl. 1.3.4).

Durch Überlagerungen von Quellen und Senken mit einer Parallelströmung kann man nach Rankine (1820–1872) bereits eine ganze Klasse von Körperströmungen beschreiben. Zunächst gibt eine Quelle in einer Parallelströmung: $F(z) = Uz + (q/2\pi) \ln z$ die Umströmung eines **Halbkörpers**, der sich stromabwärts ($x \to +\infty$) beliebig weit erstreckt wie in Fig. 21. Seine Kontur ist durch diejenige Stromlinie bestimmt, die sich im Staupunkt links von der Quelle verzweigt. Dieser liegt dort, wo $F' = u - iv = U + q/[2\pi(x + iy)] = 0$ gilt, also bei $x = -q/(2\pi U)$ und $y = 0$, oder in Polarkoordinaten bei $r = q/(2\pi U)$ und $\alpha = \pi$. Die Stromfunktion $\Psi = Uy + q\alpha/2\pi$ hat daher dort den Wert $\Psi = q/2$; ent-

sprechend wird die Körperkontur gleich der Stromlinie $\Psi = Uy + q\alpha/2\pi = \text{const} = q/2$ gesetzt. Speziell für $x \to +\infty$, $\alpha \to 0$ wird danach $y \to q/2U$, und das ist die halbe maximale Breite des Halbkörpers. Linien $\Psi = \text{const} > q/2$ stellen die Strömung außerhalb des Körpers dar, $0 < \Psi = \text{const} < q/2$ die innerhalb. Die Singularität im Quellpunkt, in dem die Geschwindigkeit unendlich wird, stört jetzt gar nicht, wenn man die Strömung im Innern nur als mathematisches Bild ansieht, das zur bequemen Darstellung der allein interessierenden Außenströmung um den Körper herum dient.

Legt man in die Parallelströmung außer der Quelle im Nullpunkt noch eine gleichstarke Senke bei $x = a$, $y = 0$, so schluckt diese Senke die ganze Flüssigkeit, die aus der Quelle kommt, wieder auf und man erhält die Umströmung

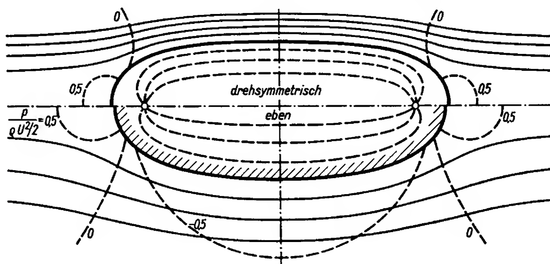


Fig. 22.
Rankine-Körper: drehsymmetrische und ebene Strömung (Stromlinien und Isobaren)

eines endlichen, geschlossenen Rankine-Körpers: $F(z) = Uz + (q/2\pi)\ln z/(z-a)$ (vgl. Fig. 22). Die Geschwindigkeit $u - iv = U + (q/2\pi)[1/z - 1/(z-a)]$ verschwindet jetzt an den zwei Staupunkten bei $x = (a/2)(1 \pm \sqrt{1 + 2q/\pi a U})$. Dort ist $\Psi = 0$, also wird die Körperkontur durch

$$\Psi = Uy - (q/2\pi)[\arctan y/x - \arctan y/(x-a)] = 0$$

bestimmt. Daraus ergibt sich ein Körperquerschnitt, der völliger als elliptisch ist. Geschwindigkeiten und Druckverlauf können nun aus Φ oder Ψ berechnet werden.

Je näher die Senke an die Quelle gelegt wird, um so mehr nähert sich die Querschnittskontur des Zylinders einem Kreis. Läßt man dabei die Stärke der Quelle und Senke q wie $1/a$ anwachsen, damit sie sich im Grenzfall $a \to 0$ nicht einfach auslöschen, so wird

$$F(z) = Uz + \lim_{a\to 0} \frac{q}{2\pi}\ln\frac{1}{1-a/z} = Uz + \frac{q}{2\pi}\left(\frac{a}{z} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{z^2} + \ldots\right)$$

$$= Uz + \frac{m}{2\pi z}, \quad \text{mit} \quad m = q \cdot a.$$

Daraus folgt

$$\Phi = U x \left(1 + \frac{m}{2\pi U r^2}\right) \quad \text{und} \quad \Psi = U y \left(1 - \frac{m}{2\pi U r^2}\right) \qquad (2.52) \text{ und } (2.53)$$

mit $r^2 = x^2 + y^2$.

Die Körperkontur $\Psi = 0$ ist somit ein Kreis mit Radius $R_0 = \sqrt{m/(2\pi U)}$, und die Abszisse $y = 0$, für die auch $\Psi = 0$ gilt, ist nach wie vor Staupunktstromlinie; es wird also die Umströmung eines Kreiszylinders beschrieben:

$$F(z) = U z + \frac{U R_0^2}{z}. \qquad (2.54)$$

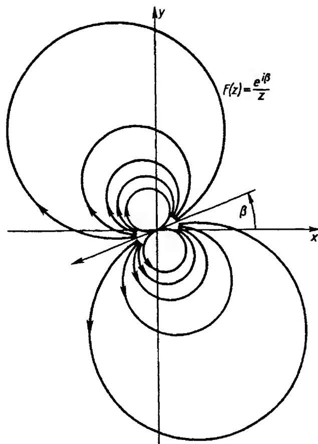


Fig. 23. Dipol (ebene Strömung)

Die durch $F(z) = m/(2\pi z)$ dargestellte Singularität nennt man einen Dipol (hier für ebene Strömung) mit dem Moment m. Stromlinien, auf denen $\Psi = my/2\pi r^2 = \text{const}$ gilt (m reell), sind alle Kreise, die die Abszisse im Nullpunkt berühren. Das läßt vermuten, daß man dieselbe Strömung auch aus zwei Wirbeln mit entgegengesetztem Drehungssinn etwa bei $x = 0$ und $y = \pm b$ erhält, wenn man den Grenzfall $b \to 0$ bei $\Gamma b \to m/2$ betrachtet. In der Tat folgt aus $F(z) = \Gamma/(2\pi i) \ln (z + bi)/(z - bi)$ hierfür wieder $F(z) = m/2\pi z$. Fig. 23 zeigt einen Dipol, dessen Achse mit der Abszisse den Winkel β bildet.

Die gleiche Außenströmung um einen Kreiszylinder (Fig. 24) kann man natürlich auch durch andere Singularitäten im Zylinderinnern sich erzeugt denken, doch ist die Darstellung durch einen Dipol in Parallelströmung am einfachsten. An Einzelheiten interessiert besonders die Druckverteilung am Zylinder, die sich auch leicht genau messen läßt. Zunächst folgen aus dem obigen Potential in Polarkoordinaten $\Phi = U r \cos\alpha\,(1 + R^2/r^2)$ die Radialgeschwindigkeit $v_r = \partial\Phi/\partial r = U \cos\alpha\,(1 - R^2/r^2)$ und die dazu senkrechte Umfangsgeschwindigkeit $v_\alpha = \partial\Phi/r\,\partial\alpha = -U \sin\alpha\,(1 + R^2/r^2)$. Am Zylinder selbst ist $r = R$, also $v_r(R) = 0$ und $v_\alpha(R) = -2U \sin\alpha$, und somit wird wegen $p + \varrho v_\alpha^2/2 = p_\infty + \varrho U^2/2$ der statische Druck auf den Staudruck bezogen: $(p - p_\infty)/(\varrho U^2/2) = 1 - 4\sin^2\alpha$; bei $\alpha = 90°$ oder $270°$ herrscht ein maximaler Unterdruck von drei Staudrucken. Daß diese Drucke insgesamt keinen Widerstand bewirken, folgt hier bereits aus der Symmetrie der Strömung um die Ordinate.

Diese Zylinderströmung in idealer Flüssigkeit stimmt nun in der Umgebung des vorderen Staupunktes (etwa für $\alpha = 180° \pm 60°$) mit der in wirklichen Flüssigkeiten ganz gut überein, obwohl diese am Zylinder haften, also nicht nur

$v_r(R) = 0$, sondern auch $v_\alpha(R) = 0$ erfüllen. An der Rückseite löst sich aber die wirkliche Strömung ab und bildet ein Totwasser mit nahezu konstantem Druck (vgl. Fig. 25); diese Vorgänge sowie der damit verbundene Widerstand hängen von der Reynoldsschen Zahl $U \cdot 2R/\nu$ stark ab.

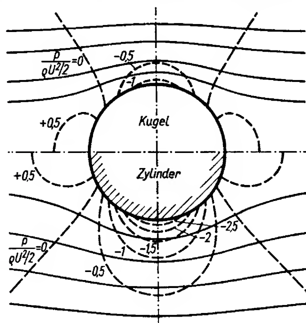


Fig. 24. Potentialströmung um Kugel und Zylinder (Stromlinien und Isobaren)

Mit dem Modell der Potentialströmung in idealer Flüssigkeit läßt sich jedoch die kompliziertere Strömung besser wiedergeben, die sich um einen Kreiszylinder ergibt, der sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um seine Achse dreht und geradlinig mit der Geschwindigkeit U fortbewegt. Der wirklichen, am Zylinder haftenden Flüssigkeit wird dann eine zusätzliche Drehbewegung aufgezwungen, die – abgesehen von der unmittelbaren Zylindernähe – durch einen Potentialwirbel (im Innern des Zylinders) gut dargestellt wird. Die entsprechende Strömungsfunktion lautet $F(z) = U(z + R^2/z) - (\Gamma/2\pi i) \ln z$ (Minuszeichen für einen rechtsdrehenden Wirbel oder Zylinder wie in Fig. 26). Der Kreis $|z| = R$ ist nach wie vor Stromlinie, wenn auch deren Konstante jetzt $\Psi = (\Gamma/2\pi) \ln R$ statt $\Psi = 0$ ist. Die Geschwindigkeit der idealen Flüssigkeit wird am Zylinder $v_\alpha(R) = -2U \sin\alpha - \Gamma/2\pi R$; sie verschwindet in den beiden Staupunkten bei $\sin\alpha = -\Gamma/(4\pi U R)$. Für $\Gamma = 4\pi U R$ fallen sie zusammen zu einem Staupunkt bei $\alpha = 270°$. Ist die Zirkulation – oder die entsprechende Drehgeschwindigkeit des Zylinders – noch größer, so existiert gar kein Staupunkt am Zylinder, wohl aber ein **freier Staupunkt** unterhalb des Zylinders bei $\alpha = 270°$ und $r > R$. Die zugehörigen Stromlinienbilder der Fig. 26 decken sich gut mit Strömungsaufnahmen in Flüssigkeiten kleiner Reibung, wenn man $\Gamma = 2\pi R^2 \omega$ setzt. Unterschiede bestehen natürlich in Wandnähe, da im Versuch am Zylinder $v_\alpha(R) = \text{const} = -\omega R$ gilt. Doch wird auch der rechnerische Auftrieb oder die Querkraft (in y-Richtung) nach **Kutta-Joukowski** $A = \varrho U \Gamma$ experimentell ganz gut bestätigt. Der im Versuch nicht unbeträchtliche Widerstand kann aber natürlich nicht so

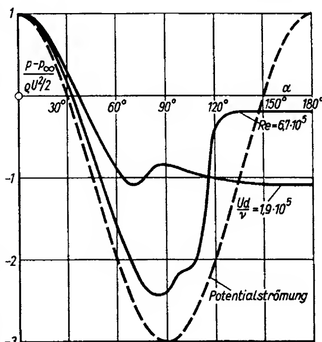


Fig. 25. Druckverteilung am Kreiszylinder

berechnet werden, denn die Potentialströmung verläuft auch hier noch völlig symmetrisch zur Ordinate $x = 0$. Ähnliche Querkräfte entstehen übrigens auch an angeströmten, sich drehenden Kugeln und anderen Rotationskörpern (Magnus-Effekt 1852), wie z. B. an Geschossen mit Drall oder geschnittenen Tennisbällen.

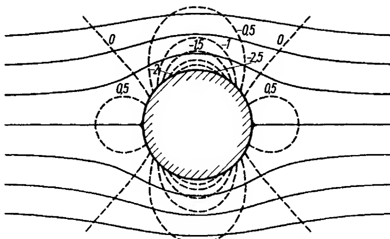


Fig. 26a. Kreiszylinder: Stromlinien und Isobaren

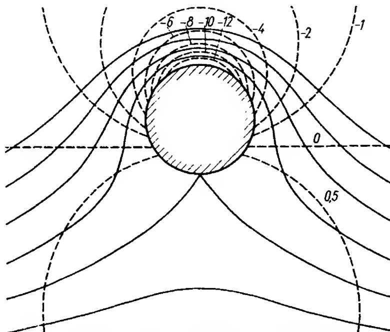


Fig. 26c. Kreiszylinder mit Zirkulation $\Gamma/(4\pi UR) = 1$

Als letztes Beispiel sei die Funktion $F(z) = A \exp[i(kz - \omega t)]$ mit $\Phi = A e^{-ky} \cos(kx - \omega t)$ untersucht, die in erster Näherung flache, ebene Schwerewellen auf tiefem Wasser darstellt, die sich in der horizontalen x-Richtung fortpflanzen (y nach unten positiv). Die Wasseroberfläche $y = y_0(x,t)$ werde nur wenig verändert gegenüber dem Ruhezustand $y = 0$; d.h. wir setzen flache Wellen voraus, deren Amplitude klein ist verglichen mit ihrer Wellenlänge λ, so daß $y_0/\lambda \ll 1$. Offenbar sind Potential und Stromfunktion räumlich und zeitlich periodisch; die Wellenzahl k bestimmt die Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ und die zeitliche Kreisfrequenz ω die Schwingungsdauer $\tau = 2\pi/\omega$. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen ist $V = \lambda/\tau = \omega/k$. Die momentane Geschwindigkeit der Wasserteilchen am festgehaltenen Ort ergibt sich aus $dF/dz = u - iv = A k e^{-ky} \times [-\sin(kx - \omega t) + i \cos(kx - \omega t)]$; sie verschwindet also für große Tiefen $y \to \infty$. Deshalb kann man den Druck dort statisch berechnen aus $p(y \to \infty) = \varrho g y$, wenn der Barometerdruck an der Oberfläche ($y_0 \approx 0$) als Nullniveau gewählt wird. Denn da auch $\partial\Phi/\partial t$ mit der Tiefe exponentiell abklingt, können wir für $y \to \infty$ die Konstante $f(t)$ in der Bernoulli-Gleichung für instationäre Strömung gleich null setzen. Für beliebige Tiefe lautet diese dann $\partial\Phi/\partial t + v^2/2 + p/\varrho - gy = 0 = A\omega e^{-ky} \sin(kx - \omega t) + (1/2) A^2 k^2 e^{-2ky} + p/\varrho - gy$. An der freien Oberfläche $y = y_0 \approx 0$ muß näherungsweise $p = 0$ gelten; nur dann, wenn durch passende Wahl der A, k und ω diese Randbedingung erfüllt wird, beschreibt die obige Funktion $F(z)$ die Bewegung der Wasserwellen. Für $y = y_0 \approx 0$ wird nun $e^{-ky} \approx 1$, falls $y_0 \ll 1/k$. Das Geschwindigkeitsquadrat können wir vernachlässigen, wenn $A^2k^2/2 \ll A\omega$ gilt. Unter dieser Voraussetzung folgt aus

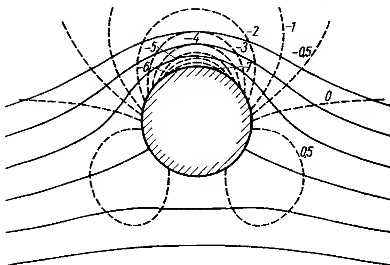


Fig. 26b. Kreiszylinder mit Zirkulation $\Gamma/(4\pi UR) = 0{,}5$

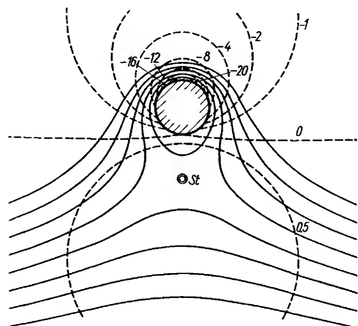


Fig. 26d. Kreiszylinder mit Zirkulation $\Gamma/(4\pi UR) = 1{,}5$

der Bernoulli-Gleichung für $y = y_0$

$$y_0 = A\,\frac{\omega}{g}\sin(kx - \omega t),$$

falls $y_0 \ll 1/k$, d. h. falls $A\omega/g \ll 1/k$ und falls $A \ll 2\omega/k^2$.

Außer der dynamischen Randbedingung für den Druck an der Oberfläche muß noch die kinematische Bedingung dort erfüllt werden: die zeitliche Änderung der Oberfläche am festen Ort muß gleich sein der Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen dort. Für flache Wellen genügt es dabei, in erster Näherung nur die senkrechte Geschwindigkeitskomponente zu betrachten, d. h. $\partial y_0/\partial t = v(y = y_0 \approx 0)$. Setzt man im obigen Ausdruck für v wieder $e^{-k y_0} \approx 1$, so wird $\partial y_0/\partial t = -(A\omega^2/g)\cos(kx - \omega t) = v(y_0) = -A\,k\cos(kx - \omega t)$ oder $\omega^2 = g k$. Damit läßt sich die zweite der obigen Voraussetzungen $A \ll 2\omega/k^2$ auch schreiben:

$$A\omega/g \ll 2\omega^2/g k^2 = 2/k.$$

Sie besagt also ebenso wie die erste nur, daß die Wellenamplitude $(y_0)_{max}$ klein sein soll gegen die Wellenlänge, bzw. sogar gegen λ/π; die einzige wesentliche Voraussetzung ist somit, daß die Wellen flach sind. Aus $\omega^2 = g k$ folgt weiter

$$V = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}\,. \qquad (2.55)$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Wellen hängt demnach nicht von der (kleinen) Amplitude ab, wohl aber von ihrer Wellenlänge, und zwar sind lange Wellen schneller als kurze (normale Dispersion wie in der Optik). Bemerkt man z. B. vor der Küste von Cornwall durch genaue Pegelmessungen langwellige Dünung (bis $\lambda = 300$ m und mehr), so kann man daraus auf einen Sturm im Atlantik schließen; von dem Wellengemisch im Sturmzentrum haben sich die längsten Wellen am schnellsten ausgebreitet.

Schließlich kann man noch die Bahnlinie eines Wasserteilchens während der Wellenbewegung aus seiner Verschiebung ξ und η in x- und y-Richtung durch Integration der momentanen, örtlichen Geschwindigkeitskomponenten ermitteln:

$$\xi = \int u \, \mathrm{d}t = \xi_0 - \frac{A k}{\omega} \mathrm{e}^{-ky} \cos(kx - \omega t)$$

und

$$\eta = \int v \, \mathrm{d}t = \eta_0 - \frac{A k}{\omega} \mathrm{e}^{-ky} \sin(kx - \omega t).$$

Es wird also $(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 = (y_{0\,\max} \cdot \mathrm{e}^{-ky})^2$, d. h. die Teilchen bewegen sich auf Kreisbahnen, deren Radius mit der Tiefe schnell abklingt. Allerdings hätte eigentlich

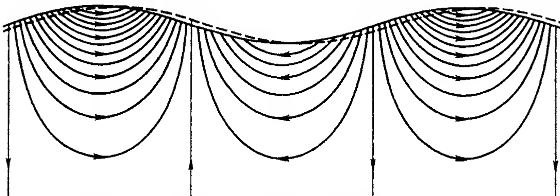


Fig. 27. Momentane Stromlinien einer flachen Wasserwelle

bei der Integration auch die Veränderung von x und y in den Ausdrücken für u und v während der Bewegung des Teilchens berücksichtigt werden müssen. Da sich jedoch geschlossene Bahnlinien in der Nähe des Mittelpunktes $x = \xi_0$ und $y = \eta_0$ ergeben haben, ist das Ergebnis nachträglich in erster Näherung gerechtfertigt.

Die Stromlinien in einem Zeitmoment sind in Fig. 27 gezeichnet. Abgesehen von der räumlichen Periodizität gibt dieses Bild aber nur wenig zur Veranschaulichung der Strömung und läßt vor allem kaum Kreisbahnen für die Bewegung der Wasserteilchen erwarten. Nur bei stationärer Strömung ist das Stromlinienbild unmittelbar verständlich und anschaulich, weil es dann zugleich die materiellen Bahnlinien darstellt.

2.2.3. Konforme Abbildung. Durch die Funktion $F(z) = \Phi + \mathrm{i}\Psi$ wird jedem Wertepaar x, y ein anderes, nämlich Φ, Ψ zugeordnet, oder – anders ausgedrückt – jeder Punkt der z-Ebene wird auf einen Punkt der F-Ebene abgebildet und umgekehrt. Wie schon gezeigt, ist das Netz der Linien $\Phi = \mathrm{const}$ und $\Psi = \mathrm{const}$ in der x, y-Ebene im kleinen quadratisch und ebenso ist es das Netz der Linien $x = \mathrm{const}$ und $y = \mathrm{const}$ in der Φ, Ψ-Ebene wie in Fig. 28. Ein Quadrat in der z-Ebene mit den Seiten $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$ entspricht dort wieder einem Quadrat, wenn auch in anderer Lage zu den Achsen und von anderer Größe; der Maßstabsfaktor $|\mathrm{d}F/\mathrm{d}z|$ kann ferner von Ort zu Ort ganz verschieden sein. Solange nur $|\mathrm{d}F/\mathrm{d}z|$ endlich ist, bleibt jedoch die Ähnlichkeit im Kleinen bestehen, weshalb man eine solche Zuordnung $F(z)$ als winkeltreue oder konforme Abbildung bezeichnet.

Natürlich kann man auch mehrere Abbildungen hintereinander vornehmen. Ist etwa in der z-Ebene das Netz $\Phi, \Psi = \mathrm{const}$ einer bekannten Strömung $F(z) = \Phi + \mathrm{i}\Psi$ gezeichnet, so kann man dieses durch eine weitere Funktion

$\zeta = \xi + i\eta = \zeta(z)$ in ein neues Netz in der ζ-Ebene umformen; dabei wird auch die ursprüngliche Körperkontur in der z-Ebene mit verzerrt, und man erhält die Umströmung eines anderen Körpers in der ζ-Ebene. Denn ist ζ eine analytische Funktion von z, so ist es auch die inverse Funktion $z(\zeta)$ und damit auch $F(z(\zeta)) = G(\zeta)$. Nur an singulären Stellen, an denen die Ableitung der Abbildungsfunktion verschwindet (wie in Staupunkten) oder unendlich wird, ist auch die Abbildung nicht mehr konform.

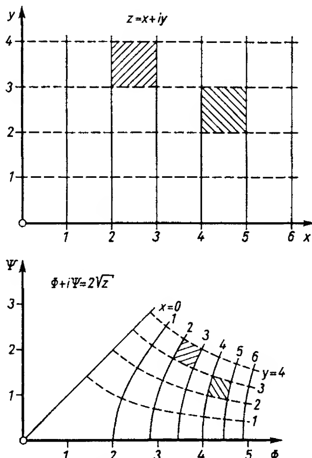


Fig. 28. Beispiel einer konformen Abbildung

Diese geometrische Veranschaulichung der Funktionen einer komplexen Variablen als konforme Abbildung[1]) ist deshalb so nützlich, weil ja hydrodynamische Probleme fast immer als Randwertprobleme gestellt sind, z. B. wenn eine Körperkontur gegeben ist und in großer Entfernung von ihr Parallelströmung herrschen soll. Insbesondere ist es oft zweckmäßig, neben der Strömungsebene die Hodographen-Ebene mit den Koordinaten u und $-iv$ zu betrachten. Man kann ja jedem Punkt der physikalischen z-Ebene, in dem die Geschwindigkeit die Komponenten u und v hat, einen Punkt der $\bar{\mathfrak{v}}$-Ebene mit den Koordinaten u und $-iv$ zuordnen. Ebenso kann man dann das Netz der Linien $\Phi = \text{const}$ und $\Psi = \text{const}$ mit in diese Hodographen-Ebene abbilden. Wiederum ist dies eine konforme Abbildung; denn, wenn $F(z) = \Phi + i\Psi$ analytisch ist, so ist es auch $dF/dz = \bar{\mathfrak{v}} = u - iv$. Das Bild der Stromlinien in der $\bar{\mathfrak{v}}$-Ebene kann man daher auch als Darstellung einer neuen Strömung auffassen, die oft leichter zu übersehen ist, weil ihre Berandung geometrisch einfacher ist als die der Strömung in der ursprünglichen z-Ebene. Falls es nun gelingt, die Singularitäten dieser Strömung in der $\bar{\mathfrak{v}}$-Ebene zu erkennen und rechnerisch anzugeben, – wozu man nötigenfalls das Strömungsgebiet durch weitere Abbildungen noch vereinfachen kann, – dann kann man schließlich durch Integration zur ursprünglichen z-Ebene zurückkehren:

$$z = \int \frac{dF}{\bar{\mathfrak{v}}}. \tag{2.56}$$

Beispiele hierfür werden im Abschnitt 2.2.8 behandelt; zunächst wollen wir den einfacheren, umgekehrten Weg gehen und von einer bekannten Strömung ausgehen, diese konform abbilden und sehen, welche neue Strömung wir so erhalten.

[1]) Vgl. A. **Betz**, Konforme Abbildung, 2. Aufl., Berlin-Göttingen-Heidelberg 1964.

2.2.3.1. Joukowski-Profil. Im Kreiszylinder mit Zirkulation haben wir bereits einen auftrieberzeugenden Körper kennengelernt. Von dieser Grundströmung in der z-Ebene ausgehend kann man nun versuchen, durch eine konforme Abbildung $\zeta(z)$ den Kreisquerschnitt speziell in den eines Tragflügels zu verwandeln, wie das unabhängig voneinander Kutta (1867–1944) und Joukowski (1847–1921) getan haben. Zunächst kann ganz allgemein – nach einem funktionstheoretischen Satz – jede in einem Kreisringgebiet um den Punkt z_0 eindeutige, analytische Funktion $\zeta(z)$ in eine Laurent-Reihe entwickelt werden: $\zeta(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$; im Punkt z_0 selbst braucht $\zeta(z)$ nicht analytisch zu sein. Der Einfachheit halber legen wir in diesen Punkt z_0 den Nullpunkt der z-Ebene, der im Innern des Kreisquerschnitts des Zylinders liegen möge, so daß mit $z_0 = 0$ wird $\zeta(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$. Damit die Parallelströmung in großer Entfernung sowohl vom Zylinder als auch vom Flügel dieselbe bleibt, sind nur solche Funktionen $\zeta(z)$ zuzulassen, für die in dieser Reihe alle a_ν mit $\nu = 2, 3, \ldots$ verschwinden und für die $a_1 = 1$ gilt; nur dann kann $\zeta = z$ für $z \to \infty$ bestehen. Somit wird $\zeta = z + a_{-1}/z + a_{-2}/z^2 \ldots$ und der denkbar einfachste, nicht-triviale Ansatz ist

$$\zeta = z + \frac{c^2}{z}, \quad c \text{ reell, z. B. } c = 1. \tag{2.57}$$

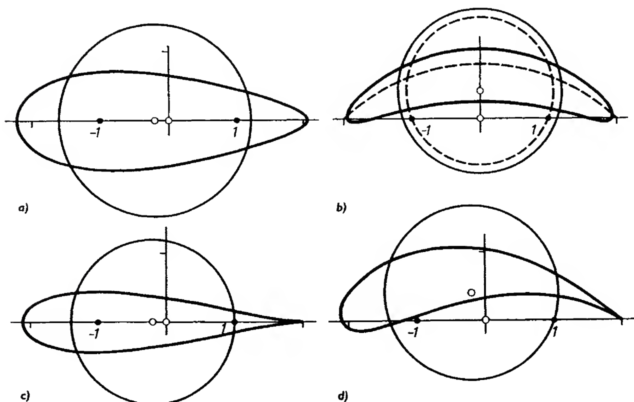


Fig. 29. a) Joukowski-Abbildung ($x_M = -0{,}2$; $y_M = 0$; $R = 1{,}4$)
b) Joukowski-Abbildung ($x_M = 0$; $y_M = 0{,}4$; $R = 1{,}2$ bzw. $\sqrt{1{,}16}$)
c) Joukowski-Abbildung ($x_M = -0{,}2$; $y_M = 0$; $R = 1{,}2$)
d) Joukowski-Abbildung ($x_M = -0{,}2$; $y_M = 0{,}4$; $R = \sqrt{1{,}6}$)

Mit dieser Abbildung kann man nun in der Tat schon praktisch brauchbare Flügelprofile erhalten. Betrachten wir zunächst einen Kreis um den Nullpunkt der z-Ebene als Körperkontur: $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$. Dieser geht dann über in eine Ellipse in der ζ-Ebene, nämlich in $\zeta = (R + c^2/R)\cos\alpha + \mathrm{i}(R - c^2/R)\sin\alpha$. Liegt der Kreismittelpunkt jedoch auf der Ordinate ($x_M = 0$, $y_M = m$), so ergibt sich als Abbildung in der ζ-Ebene eine bohnenförmige Kontur wie in Abb. 29b (mit $c = 1$); diese artet zum dünnen Kreisbogen dann aus, wenn $c^2 = R^2 - m^2$. Ist der Kreismittelpunkt auf der Abszisse, so entsteht aus dem Kreis eine eiförmige Kontur wie in Fig. 29a.

Die Abbildung wird (für $z \neq 0$) in den beiden Punkten $z = \pm c$, in denen der Maßstabsfaktor $\mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}z = 1 - c^2/z^2$ verschwindet, singulär, und zwar wird in den entsprechenden Punkten der ζ-Ebene die Geschwindigkeit unendlich. Wird die Umströmung des Kreiszylinders durch $F(z)$ dargestellt, so ist nämlich die Geschwindigkeit in der Strömung um die neue Kontur in der ζ-Ebene $\mathrm{d}F(\zeta)/\mathrm{d}\zeta = \mathrm{d}F(z)/\mathrm{d}z \cdot \mathrm{d}z/\mathrm{d}\zeta$; und diese bleibt bei $\mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}z = 0$ höchstens dann endlich, wenn dort auch gerade die Geschwindigkeit in der z-Ebene ($\mathrm{d}F/\mathrm{d}z$) verschwindet. In der Regel bleibt daher die Strömung auch nach der Abbildung nur dann regulär, wenn die Punkte $z = \pm c$ im Innern der Kreiskontur liegen. Wenn jedoch einer der beiden Punkte, etwa $z = +c$, gerade auf dem Kreis liegt und der andere bei $z = -c$ von ihm eingeschlossen wird, so erhält man Joukowskische Flügelprofile wie in Fig. 29c, d mit abgerundeter Flügelnase vorn und scharfer, (unendlich) dünner Hinterkante im Punkt $\xi = 2c$, $\eta = 0$, der dem Punkt $x = c$, $y = 0$ entspricht[1]). Wie an jeder umströmten Kante wird hier die Geschwindigkeit gewöhnlich unendlich. Diese Singularität auf der Kontur läßt sich jedoch dadurch aufheben, daß man die Zirkulation Γ der Kreisumströmung speziell so annimmt, daß der hintere Staupunkt am Profil (mit $\mathrm{d}F/\mathrm{d}z = 0$) gerade auf der Hinterkante liegt und die Strömung dort glatt abfließt. Erst diese Abflußbedingung, die die Zirkulation eindeutig festlegt, macht die Profilumströmung singularitätenfrei und damit physikalisch brauchbar. Es läßt sich schließlich noch zeigen, daß die Zirkulation um den Zylinder nicht verändert wird durch die konforme Abbildung, wenn diese und die Ausgangsströmung im Strömungsgebiet regulär sind, wenn also z. B. keine freien Wirbel außerhalb des Zylinders vorhanden sind.

2.2.3.2. Platte. Als einfachster Spezialfall werde die Strömung um eine ebene Platte berechnet. Wenn der Kreismittelpunkt im Nullpunkt der z-Ebene liegt und die Abbildungskonstante c gerade gleich R gewählt wird: $\zeta = z + R^2/z$, so ist das Abbild dieses Kreises eine dünne Platte in der ζ-Ebene: $\xi = 0$ und $-2R < \eta < +2R$. Eine Parallelströmung in der x- bzw. der y-Richtung wird durch diese Platte überhaupt nicht verändert. Es ist aber nicht schwierig, diese Anströmungsrichtung um den Winkel β gegen die x- oder y-Achse zu drehen, indem man $z \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}$ anstelle von z schreibt; der Kreis in der z-Ebene bleibt dann weiterhin Stromlinie, und es wird

$$F(z) = U\left(z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta} + R^2\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}}{z}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}}\ln\left(z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\right). \qquad (2.58)$$

Mit $\zeta = z + R^2/z$ oder $z = (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4R^2})/2$ kann man nun Potential- und Stromfunktion in der ζ-Ebene ausrechnen. Die Geschwindigkeit wird dort

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\zeta} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta} = \frac{[U(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta} - R^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}/z^2) + \Gamma/(2\pi\mathrm{i}\,z)]}{1 - R^2/z^2},$$

wobei z als bequemere Rechengröße noch nicht durch ζ ausgedrückt worden ist.

---

[1]) Auch in Fig. 31 auf S. 77 ist ein Joukowski-Profil gezeichnet.

Um speziell die Geschwindigkeit der Platte zu erhalten, muß man für z die entsprechenden Werte am Zylinder einsetzen, also $z = R\,e^{i\alpha}$. Das ergibt $u_{Pl}/U = -[\sin(\beta-\alpha) + \Gamma/(4\pi R U)]/\sin\alpha$ und natürlich $v_{Pl}/U = 0$; sowohl an der Vorderkante ($\alpha = \pi$) wie an der Hinterkante ($\alpha = 0$) wird die Geschwindigkeit unendlich groß. Um wenigstens die obige Abflußbedingung für die Hinterkante zu erfüllen: $u_{Pl}(\alpha = 0)/U =$ endlich, muß man der Zirkulation Γ den Wert $\Gamma = -4\pi R U \cdot \sin\beta$ geben. Das zugehörige Stromlinienbild sowie das für $\Gamma = 0$, zeigen die Fig. 30b und 30a; die Bilder sind um den Anstellwinkel β gedreht, so daß die Anströmung wieder horizontal erfolgt. Mit der Zirkulation ist nun nach Gl (2.14). auch der Auftrieb bekannt: $A = -\varrho U \Gamma$, und damit wird der Auftriebswert c_a, bezogen auf den Staudruck der Anströmung und die Plattenfläche (Plattentiefe $= 4R$):

$$c_a = 2\pi \sin\beta. \qquad (2.59)$$

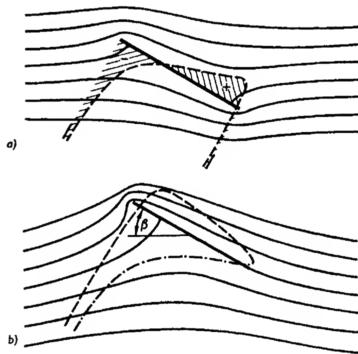


Fig. 30. a) Angestellte Platte: Strömung ohne Zirkulation (Druck auf der Oberseite der Platte)
b) Angestellte Platte: Strömung mit Zirkulation (Druck auf der Unterseite ———, Unterdruck auf der Oberseite –·–·–·–)

Dieses Ergebnis und auch die entsprechenden Auftriebsbeiwerte für endlich dicke, gewölbte Joukowski-Profile mit singularitätenfreier, abgerundeter Vorderkante werden im Versuch (bei nicht zu kleinen *Re*-Zahlen) bis zu Anstellwinkeln β von etwa $\pm 10°$ gut bestätigt. Die Zähigkeit der wirklichen Strömungsmedien verringert allerdings die rechnerische Zirkulation und damit auch den Auftrieb etwas, ferner verursacht sie auch einen kleinen Widerstand (vgl. Fig. 31); über die Entstehung der Zirkulation bei der Anfahrt des Tragflügels vgl. 2.2.8.1 (letzter Absatz). Bei größeren Anstellwinkeln löst sich die wirkliche Strömung von der Platte ab, und es bildet sich ein großes Totwasser; hier versagt dann die Modellströmung völlig. Daß schon die einfachste Abbildungsfunktion den Kreisquerschnitt in Flügelprofile umformt, die auch in wirklichen Medien geeignet sind, großen Auftrieb bei kleinem Widerstand (für kleine β) zu erzeugen, ist natürlich ein glücklicher Zufall. Noch mehr ist das aber der Umstand, daß diese Profile eine Hinterkante aufweisen, die bereits im Modell der idealen Flüssigkeitsströmung eine eindeutige Zuordnung von Zirkulation und Anstellwinkel – die Abflußbedingung – vorschreibt, und die auch von Flüssigkeiten kleiner Zähigkeit in guter Näherung befriedigt wird. Im Gegensatz dazu gibt es z. B. bei der Modellströmung um einen angestellten, elliptischen Zylinder keine klare Abflußbedingung und keine ausgezeichnete Zirkulation, so daß dann auch die Bestimmung des Auftriebs offen bleibt. In wirklicher Flüssigkeit stellt man hier schon bei kleinen Anstellwinkeln eine wesentliche Abhängigkeit des Ablösevorgangs und damit der Kräfte von der Grenzschicht, also von der *Re*-Zahl fest.

Ergänzend sei zur obigen Plattenströmung noch das sogenannte Kutta-Paradoxon erwähnt. In idealer Flüssigkeit existieren keine Schubspannungen, die resultierende Kraft der Flüssigkeit auf die Platte muß also gleich dem Integral der Normaldrucke quer zur Platte sein. Diese Normaldrucke können aber nur eine Resultierende R senkrecht zur Platte haben, die man in einen Auftrieb $A = R \cos \beta$ und einen Widerstand $R \sin \beta = A \tan \beta$ in Strömungsrichtung zerlegen kann. Andererseits muß der Widerstand nach dem Impulssatz in 2.2.1 verschwinden! Dieser Widerspruch löst sich auf, wenn man zunächst ein endlich dickes Joukowski-Profil betrachtet, an dem die Unterdrucke vorn an der Profilnase zu einer nach vorn gerichteten Saugkraft integriert werden können. Läßt man nun das Profil dünner werden und den Nasenradius kleiner, so werden die Unterdrücke dort größer, greifen aber an einer immer kleiner werdenden Fläche an; auch im Grenzfall der scharfen Vorderkante ergibt sich so noch eine endliche Saugkraft nach vorn, die die obige Widerstandskomponente $R \sin \beta$ gerade wieder aufhebt. – In wirklicher Flüssigkeit reißt die Strömung um eine zugeschärfte Platte an deren Vorderkante etwas ab, so daß weder hohe Unterdrucke noch eine Saugkraft entstehen. Demzufolge wird hier ein merklich größerer Widerstand beobachtet als an Profilen mit gut abgerundeter Vorderkante, an denen die Saugkraft sich ausbilden kann.

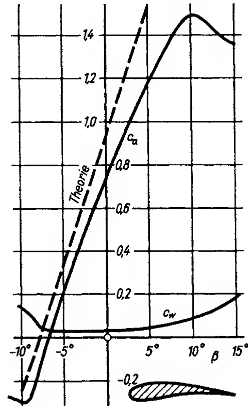


Fig. 31.
Gemessene Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte eines Joukowski-Profils nach Betz (ZFM, 1915)

Ein schiffbauliches Analogon zum Joukowski-Profil stellt die Abbildung $\zeta = z + a/z + b/z^3$ von F. M. Lewis[1]) dar, die z. B. zur Berechnung der Rollschwingungen eines Schiffes benutzt werden kann. Der Nullpunktkreis in der z-Ebene $|z| = 1$ wird nämlich z. B. durch

$$\zeta = (z + \varepsilon z^{-3})/(1 + \varepsilon)$$

in eine Figur in der ζ-Ebene transformiert, die einem an der Wasseroberfläche gespiegelten Schiffsspant ähnlich ist (Fig. 32).

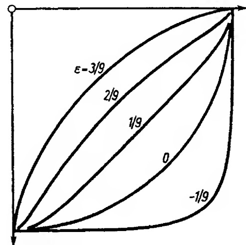


Fig. 32.
Lewis-Abbildung für Schiffsspanten

2.2.3.3. Schwarz-Christoffelsche Formel. Gewisse, ebene Potentialströmungen können mit der Formel von H. A. Schwarz und Christoffel berechnet werden, die das Innere eines Vielecks in einer z-Ebene auf die obere Halbebene einer ζ-Ebene konform abbildet:

$$\frac{dz}{d\zeta} = C\,(\zeta - e_1)^{-\alpha_1/\pi} \times$$
$$\times\,(\zeta - e_2)^{-\alpha_2/\pi} \cdot \ldots \cdot (\zeta - e_n)^{-\alpha_n/\pi}\,. \quad (2.60)$$

[1]) Trans. Soc. Nav. Arch. Mar. Eng., N. Y., 1929.

Dabei bedeuten wie in Fig. 33 die $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ die Außenwinkel des Polygons $E_1, E_2, \ldots, E_n$ der z-Ebene (so daß $\sum \alpha_2 = 2\pi$ gilt); die Eckpunkte E_i werden auf die Punkte e_k auf der reellen Achse der ζ-Ebene abgebildet. Die komplexe Konstante $C = |C| e^{i\gamma}$ bestimmt durch $|C|$ den Maßstab und durch γ die Orientierung des Vielecks bezüglich der positiven x-Achse. Wenn eine Ecke in der z-Ebene etwa E_1, einem unendlich fernen Punkt auf der ζ-Achse entspricht, also $e_1 \to \infty$, so kann man statt C eine Konstante $C' = C(-e_1)^{-\alpha_1/\pi}$ einführen, so daß wegen $(1 - \zeta/e_1)^{-\alpha_1/\pi} \to 1$ für $e_1 \to \infty$ dann gilt $dz/d\zeta = C'$. $(\zeta - e_2)^{-\alpha_2/\pi} \ldots (\zeta - e_n)^{-\alpha_n/\pi}$; unabhängig vom Außenwinkel α_1 an dieser Ecke E_1 ist also der Faktor $(\zeta - e_1)^{-\alpha_1/\pi}$ einfach wegzulassen, falls $e_1 \to \infty$. – Läßt man zunächst die Konstante C (oder C') noch offen, so kann man drei Stellen e_i auf der reellen ζ-Achse frei wählen.

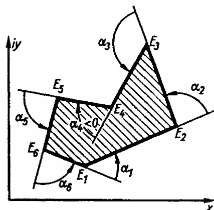


Fig. 33. Zur Schwarz-Christoffelschen Formel

Als Beispiel sei die Umströmung einer (senkrechten) Stufe in einer Parallelströmung U, wie in Fig. 34, betrachtet. Das Gebiet oberhalb $E_{1\infty}, E_2, E_3, E_{4\infty}$ sei das Vieleck in der z-Ebene. Offenbar ist es hier besonders bequem, den unendlich fernen Punkt der z-Ebene auf den unendlich fernen Punkt der ζ-Ebene abzubilden. Es bleiben dann nur die Ecken E_2 und E_3 mit den Winkeln $\alpha_2 = +90°$ und $\alpha_3 = -90°$. Wählt man $e_2 = -1$ und $e_3 = +1$, so wird

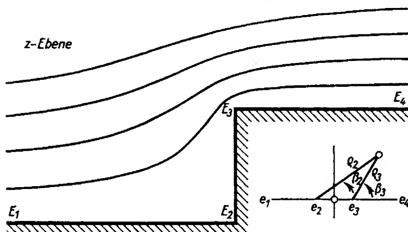


Fig. 34. Umströmung einer Stufe

$$z = C\int (\zeta + 1)^{-1/2} (\zeta - 1)^{+1/2}\, d\zeta = C\,[\sqrt{\zeta^2 - 1} - \ln(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})] + C_1 . \qquad (2.61)$$

Um zum jeweiligen Punkt ζ das Vorzeichen der Wurzel zu bestimmen, kann man Polarkoordinaten einführen, so daß $\zeta + 1 = \varrho_2\, e^{i\beta_2}$, $\zeta - 1 = \varrho_3\, e^{i\beta_3}$ und

$$\sqrt{\zeta^2 - 1} = +\sqrt{\varrho_2\, \varrho_3} \cdot e^{i(\beta_2 + \beta_3)/2};$$

daher wird z. B. für Punkte auf der reellen ϱ-Achse zwischen e_2 und e_3 mit $\beta_2 = 0$ und $\beta_3 = \pi$: $\sqrt{\zeta^2 - 1} = + i\sqrt{1 - \zeta^2}$. Will man den Nullpunkt der z-Ebene in den Punkt E_2 legen, und ist die Stufenhöhe h, so folgt für die Integrationskonstante und für C

in E_2 $z = 0$ für $\zeta = -1$: $z = -C\ln(-1) + C_1 = -i\pi C + C_1 = 0$

in E_3 $z = ih$ für $\zeta = +1$: $z = 0 + C_1 = ih$

also $C_1 = ih$ und $C = h/\pi$.

Die Strömung in der z-Ebene kann man sich verursacht denken durch eine Quelle in $E_{1\infty}$ und eine Senke in $E_{4\infty}$. Die entsprechenden Singularitäten in $e_{1\infty}$ und $e_{4\infty}$ liegen auch in der ζ-Ebene im Unendlich-Fernen; da ferner der speziellen Stromlinie $E_{1\infty}E_2E_3E_{4\infty}$ die Stromlinie $e_{1\infty}e_2e_3e_{4\infty}$ in der ζ-Ebene entsprechen soll, hat man hier eine Parallelströmung $F(\zeta) = \Phi + i\Psi = V\xi$.

Mit der obigen Abbildungsfunktion $z(\zeta)$ ergibt sich daraus die Geschwindigkeit in der z-Ebene zu

$$\bar{v} = u - i\,v = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\zeta}\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z} = \frac{\pi V}{h}\sqrt{\frac{\zeta+1}{\zeta-1}}\,. \tag{2.62}$$

Da $\zeta\to\infty$ auch $z\to\infty$ entspricht, wo die Geschwindigkeit gleich U sein sollte, muß $V = Uh/\pi$ sein. Mit $F(\zeta) = Uh\zeta/\pi$ und dem obigen Zusammenhang zwischen z und ζ ist dann auch die Strömung in der z-Ebene bestimmbar.

So wird z. B. die durch die Strömung erzeugte Druckkraft auf die Stufe, bezogen auf den ungestörten Staudruck und die Stufenhöhe h:

$$c_p = \int\limits_0^{i} \frac{p - p_{1\infty}}{\varrho U^2/2}\,\mathrm{d}\left(\frac{z}{h}\right) = \int\left(1 - \frac{v^2}{U^2}\right)\frac{\mathrm{d}z}{h} = i - \frac{1}{hU^2}\int v^2\,\mathrm{d}z\,. \tag{2.63}$$

Und dafür ergibt sich wegen

$$\int v^2\,\mathrm{d}z = \int\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}\,\mathrm{d}\zeta$$
$$= \int U^2\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\cdot\frac{h}{\pi}\sqrt{\frac{\zeta-1}{\zeta+1}}\,\mathrm{d}\zeta$$
$$= \frac{U^2 h}{\pi}\,i\int\limits_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1+\zeta}{1-\zeta}}\,\mathrm{d}\zeta = U^2 h\,i,$$

schließlich

$$c_p = i - i = 0\,. \tag{2.64}$$

Die Überdrucke in der Nähe des Staupunktes E_2 werden also gerade aufgehoben durch Unterdrucke infolge der hohen Geschwindigkeiten in der Nähe von E_3. Denkt man sich die Strömung symmetrisch zur x-Achse gespiegelt, so erhält man die ebene, unbegrenzte Strömung um einen speziellen **Halbkörper**. Wie in 2.1.2.3 bereits ganz allgemein gezeigt wurde, verschwindet der Druckwiderstand auch dieses Halbkörpers; dem dortigen Spaltdruck p_2 entspricht hier das Druck-Nullniveau $p_{1\infty} = p_{4\infty}$.

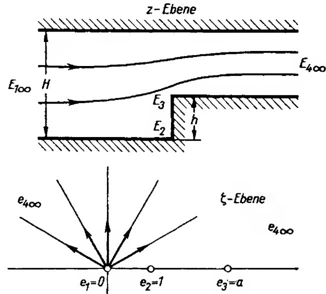


Fig. 35.
Stufenförmige Verengung in einem ebenen Kanal

Wie an jeder Kante oder vorspringenden Ecke in einer Potentialströmung wird auch hier in E_3 selbst die Geschwindigkeit unendlich groß. Aber auch abgesehen davon sieht die Strömung einer wirklichen Flüssigkeit etwas anders aus als in Fig. 34.

Schwieriger ist die Abbildung einer Stufe in einem begrenzten (ebenen) Kanal nach Fig. 35. Hier muß man wegen der verschiedenen Geschwindigkeiten zwischen den beiden Stellen $E_{1\infty}$ bei $z\to-\infty$ und $E_{4\infty}$ bei $z\to+\infty$ unterscheiden und kann nur eine davon, etwa $E_{4\infty}$, auch in der ζ-Ebene ins Unendliche ($e_{4\infty}$) abbilden. $E_{1\infty}$ möge dagegen $e_1 = 0$ entsprechen, E_2 dem Punkt $e_2 = +1$ und E_3 einem Punkt $e_3 = a$, dessen

Lage erst später bestimmt werden kann, da nun bereits drei Punkte, nämlich e_1, e_2 und $e_{4\infty}$, fest gewählt worden sind. Der Außenwinkel in der Ecke E_1 ist $+\pi$, da sich beim Umfahren des Randes im positiven Sinn eine Richtungsänderung um 180° zwischen oberem und unterem Rand ergibt. Es wird also $\mathrm{d}z/\mathrm{d}\xi = C\,\xi^{-1}(\xi-1)^{-1/2}\cdot(\zeta-a)^{+1/2}$. In der z-Ebene kann man sich die Strömung verursacht denken durch eine Quelle in $E_{1\infty}$, die in der Zeiteinheit die Menge UH ausstößt, die von einer gleichstarken Senke in $E_{4\infty}$ wieder verschluckt wird. Daher ist auch in der ζ-Ebene im Nullpunkt $e_1 = 0$ eine Quelle anzunehmen, und zwar von der Ergiebigkeit $2\,UH$, da nur die Hälfte davon in die obere Halbebene fließt. Die Senke im unendlich fernen Punkt $e_{4\infty}$ geht dagegen nicht in die Rechnung ein. Es wird also $F(\zeta) = (UH/\pi)\ln\zeta$. Mit der Hilfsgröße $t^2 = (\zeta-a)/(\zeta-1)$ wird

$$z = \frac{H}{\pi}\left[\frac{H-h}{H}\ln\frac{1+t}{1-t} - \ln\frac{\sqrt{a}+t}{\sqrt{a}-t}\right], \tag{2.65}$$

wobei die Integrationskonstante null gesetzt ist, so daß – für $\zeta = e_3 = a$ mit $t = 0$ – der Punkt E_3 in den Nullpunkt der z-Ebene fällt. Aus den Randbedingungen folgt schließlich $C = (H-h)/\pi$ und $\sqrt{a} = H/(H-h) = 1/(1-\alpha)$ mit $\alpha = h/H$.

Das Integral über das Quadrat der Geschwindigkeiten auf E_2E_3 (für $z = 0$ bis $z = -\mathrm{i}h$) wird hier $\int_0^{-\mathrm{i}h}(v^2/U^2)\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}h/(1-\alpha)$; trotz der Singularität der Geschwindigkeit in E_3 ist dieses Integral endlich und bestätigt die in 2.1.2.3 allgemein abgeleitete Gl. (2.27).

2.2.4. Kräfte in ebener stationärer Strömung. Die Kräfte, die die Flüssigkeit auf einen gleichförmig bewegten Körper ausübt, lassen sich für ebene Potentialströmungen besonders einfach und elegant mit Hilfe der komplexen Strömungsfunktion berechnen. Am Bogenelement des Körperquerschnitts bewirkt der Flüssigkeitsdruck p Kräfte in x- und y-Richtung (vgl. Fig. 36); $\mathrm{d}X = -p\,\mathrm{d}y$ und $\mathrm{d}Y = p\,\mathrm{d}x$. Deren Moment um den Koordinatennullpunkt ist $\mathrm{d}M = p\,(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y)$; rechentechnisch ist es praktisch, noch das Virial einzuführen: $\mathrm{d}N = x\,\mathrm{d}X + y\,\mathrm{d}Y = p\,(-x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x)$.

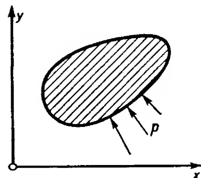


Fig. 36.
Normaldruck einer reibungslosen Flüssigkeit auf einen Körper

Für stationäre Strömungen gilt nach Bernoulli: $p = \mathrm{const} - \varrho\,v^2/2$, wobei für die folgende Integration um den Körper die Druckkonstante weggelassen werden kann, da sie insgesamt keine Kraft oder Momente am Körper verursacht. Die Geschwindigkeit kann aus der komplexen Strömungsfunktion im körperfesten Koordinatensystem $F(z)$ ausgedrückt werden: $u - iv = \mathrm{d}F/\mathrm{d}z$. Ersetzt man in dieser Formel überall i durch $-$i und bezeichnet konjugiert komplexe Größen durch einen Querstrich, so wird daraus $u + \mathrm{i}v = \mathrm{d}\bar{F}/\mathrm{d}\bar{z}$, mit $\mathrm{d}\bar{F} = \mathrm{d}\Phi - \mathrm{i}\,\mathrm{d}\Psi$ und $\mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - \mathrm{i}\,\mathrm{d}y$. Damit kann man statt v^2 auch schreiben $v^2 = (u - \mathrm{i}v)\times(u + \mathrm{i}v) = \mathrm{d}F/\mathrm{d}z\cdot\mathrm{d}\bar{F}/\mathrm{d}\bar{z}$ und es wird

$$\mathrm{d}X - \mathrm{i}\,\mathrm{d}Y = -p\,(\mathrm{d}y + \mathrm{i}\,\mathrm{d}x) = -p\,\mathrm{i}\,\mathrm{d}\bar{z} = \frac{\mathrm{i}\varrho}{2}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}\bar{F}, \tag{2.66}$$

sowie
$$\mathrm{d}M + \mathrm{i}\,\mathrm{d}N = p\,z\,\mathrm{d}z = -\frac{\varrho}{2}z\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}\bar{F}. \tag{2.67}$$

Die Körperkontur K, über die die Druckkräfte zu integrieren sind, muß natürlich Stromlinie sein; auf ihr gilt also $\Psi = \text{const}$ oder $\mathrm{d}\Psi = 0$, und es ist dort $\mathrm{d}F = \mathrm{d}\Phi + \mathrm{i}\,\mathrm{d}\Psi = \mathrm{d}\overline{F}$.

Folglich wird

$$X - \mathrm{i}\,Y = \frac{\mathrm{i}\varrho}{2} \oint_K \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z \tag{2.68}$$

und

$$M + \mathrm{i}N = -\frac{\varrho}{2} \oint_K z \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z.$$

Das sind die Formeln von Blasius (1910).

Wenn die Strömung außerhalb des Körpers keine Singularitäten aufweist, so sind F und $\mathrm{d}F/\mathrm{d}z$ im Strömungsgebiet überall analytisch, also endlich, stetig und differenzierbar, und man erhält dieselben Ergebnisse für Kräfte und Moment für jeden beliebigen Integrationsweg, der den Körper einmal umschlingt und im Strömungsgebiet liegt. Denn die Differenz zwischen dem Integral längs eines solchen Wegs und dem längs der Körperkontur verschwindet, da sie dem Integral einer analytischen Funktion über einen geschlossenen Weg entspricht. Bei Körperumströmungen mit äußeren Singularitäten, etwa Potentialwirbeln hinter dem Körper, kann man den Integrationsweg zwar auch beliebig vom Körper wegschieben, darf aber die singulären Stellen dabei nicht übertreten, sondern muß sie einzeln umgehen und einschließen.

Wendet man die Blasius-Formeln speziell auf einen Körper an, der sich in einer gleichförmigen Parallelströmung U in x-Richtung ohne äußere Singularitäten befindet, so müssen sich natürlich dieselben Kräfte ergeben, wie sie für den dreidimensionalen Fall mit dem Impulssatz in 2.1.2 abgeleitet worden sind. Der Koordinatennullpunkt $z = 0$ liege im Körperquerschnitt und als Integrationsweg sei ein Kreis $|z| = R$ gewählt, dessen Radius groß gegen den Körperquerschnitt sei. Der Geschwindigkeit der Parallelströmung U überlagern sich dort – weit weg vom Körper – folgende Beiträge zu $\mathrm{d}F/\mathrm{d}z$:

1. $Q/2\pi z$, mit $Q =$ Gesamtquellstärke, falls aus dem Körper zusätzliche Flüssigkeit abgegeben oder abgesaugt ($Q < 0$) wird;

2. $-\mathrm{i}\Gamma/2\pi z$, mit $\Gamma =$ Gesamtzirkulation aller im Körperinnern angenommenen Wirbel (etwa zur Erfüllung der Abflußbedingung);

3. $-m/2\pi z^2$, mit $m = m_x + \mathrm{i}m_y =$ komplexes Gesamtmoment aller Dipole im Körperinnern; z. B. beim Kreiszylinder (Radius R_0) war $F(z) = Uz + UR_0^2/z$, also $Q = 0$, $\Gamma = 0$, $m_x = 2\pi U R_0^2$ und $m_y = 0$;

4. Glieder der Größenordnung $1/R^3$, $1/R^4$ usw.

Damit wird

$$\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2 = U^2 + 2U\frac{Q - \mathrm{i}\Gamma}{2\pi z} + \frac{C}{2\pi z^2} + 0\left(\frac{1}{R^3}\right) \tag{2.70}$$

mit

$$C = -2mU + \frac{(Q - \mathrm{i}\Gamma)^2}{2\pi}. \tag{2.71}$$

Nach dem Cauchyschen Hauptsatz der Funktionentheorie gilt nun für die komplexe Integration längs eines geschlossenen Weges

$$\oint \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots\right) \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}\, a_1; \tag{2.72}$$

nur das Glied der Ordnung $1/z$ hat ein Residuum, d. h. einen Beitrag für das Integral. Deshalb wird hier nach Gl. (2.68) und (2.69)

$$X - \mathrm{i}\, Y = \frac{\mathrm{i}\varrho}{2} \cdot 2U \frac{Q - \mathrm{i}\Gamma}{2\pi} \cdot 2\pi \mathrm{i} \tag{2.73}$$

und

$$M + \mathrm{i}\, N = -\frac{\varrho}{2} \frac{C}{2\pi} \cdot 2\pi \mathrm{i}\,, \tag{2.74}$$

also

$$X = -\varrho U Q, \quad Y = -\varrho U \Gamma \tag{2.75}$$

und

$$M = \varrho \left(-U m_y - \frac{Q\Gamma}{2\pi}\right). \tag{2.76}$$

Man erhält somit wieder, hier speziell für ebene Potentialströmungen, den Vortrieb einer Quelle und den Quertrieb eines Wirbels in einer Parallelströmung.

2.2.5. Kräfte bei instationärer Translation eines Zylinders. Als einfachstes Beispiel einer instationären Potentialbewegung sei diejenige betrachtet, die ein Zylinder in ruhender Flüssigkeit verursacht, wenn er in negativer x-Richtung mit einer zeitlich veränderlichen Geschwindigkeit $U(t)$ bewegt wird. Das momentane Stromlinienbild wird nach wie vor bestimmt durch die rein kinematischen Bedingungen der Drehungsfreiheit (Existenz eines Potentials Φ) und die Kontinuitätsgleichung $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \Delta\Phi = 0$; es ist daher das gleiche Bild wie in stationärer Strömung, das durch $F_K(z)$ beschrieben wird. Wie bisher, sind x und y in $z = x + \mathrm{i}y$ die Koordinaten im körperfesten System, worauf der Index K besonders hinweisen soll. Die dynamische Bernoulli-Gleichung wird jetzt aber nur dann übersichtlich, wenn man die Geschwindigkeiten und deren Potential auf ein raumfestes System (Index R) bezieht und den Strömungszustand am beliebigen Ort mit dem unveränderlichen Ruhezustand der Flüssigkeit in großer Körperentfernung vergleicht:

$$\frac{\partial \Phi_R}{\partial t} + \frac{p}{\varrho} + \frac{v_R^2}{2} = \left(\frac{\partial \Phi_R}{\partial t}\right)_\infty + \frac{p_\infty}{\varrho} + \frac{v_{R\infty}^2}{2} = \frac{p_\infty}{\varrho} = \text{const.} \tag{2.77}$$

Wenn der Zylinder in der ruhenden Flüssigkeit geradlinig mit der Geschwindigkeit $U(t)$ in negativer x-Richtung bewegt wird, so verursacht er eine Strömungsgeschwindigkeit

$$u_R - \mathrm{i} v_R = \frac{\mathrm{d}F_K(z)}{\mathrm{d}z} - U = u_K - \mathrm{i} v_K - U; \tag{2.78}$$

dabei ist es zweckmäßig, statt mit raumfesten Koordinaten $\xi = x - Ut$, $\eta = y$ mit den körperfesten Lagekoordinaten x, y weiterzurechnen. Mit diesen Koordinaten lautet das raumfeste Geschwindigkeitspotential $\Phi_R = \Phi_K - Ux$, da $u_R = \partial\Phi_R/\partial x = \partial\Phi_K/\partial x - U$ und $v_R = v_K$. Dieses Potential Φ_R ändert sich nun

mit der Zeit einerseits immer dadurch, daß am festgehaltenen Raumpunkt $\xi = \text{const} = x - Ut$ sich x ändert: $dx/dt = U$, und andererseits noch dann, falls sich U ändert. Es wird also

$$\frac{\partial \Phi_R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\Phi_K(x, y) - Ux) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial U}\Phi_R \cdot \frac{dU}{dt} = (u_K - U) \cdot U + \left(\frac{\partial \Phi_K}{\partial U} - x\right) U',$$

mit $dU/dt = U'$. Da ferner nach (2.78) $v_R^2 = v_K^2 - 2Uu_K + U^2$, so wird aus Gl. (2.77)

$$\frac{p - p_\infty}{\varrho} = \frac{1}{2}(U^2 - v_K^2) - U'\frac{\partial \Phi_K}{\partial U} + U'x. \tag{2.79}$$

Um die beiden letzten Glieder unterscheidet sich der Druck bei $U' \neq 0$ von dem in stationärer Strömung. In dieser hätte ein undurchdringlicher Zylinder ohne Zirkulation weder Widerstand noch Auftrieb (vgl. 2.1.2.1). Wenn jedoch $U' \neq 0$ gilt, so ergibt sich auch in idealer Flüssigkeit ein Widerstand, den man aus (2.79) berechnen kann, indem man das Druckintegral längs der Körperkontur bildet; da auf dieser $\Psi_K = \text{const}$ ist, kann man dort statt über Φ_K auch über F_K integrieren:

$$\begin{aligned} X_{\text{inst}} + i\, Y_{\text{inst}} &= \oint p(-dy + i\,dx) = \oint i p\, dz \\ &= -i\varrho U' \frac{\partial}{\partial U}\oint F_K(z)\, dz + i\varrho U' \oint x(dx + i\,dy) \\ &= -i\varrho U' \frac{\partial}{\partial U}\oint F_K(z)\, dz - \varrho U' A, \end{aligned} \tag{2.80}$$

mit $A = \text{Querschnitt} = \oint x\,dy$ und $\oint x\,dx = 0$.

So wird z. B. für den Kreiszylinder mit $F(z) = U(t)\,(z + R_0^2/z)$

$$X_{\text{inst}} = -i\varrho U' \cdot R_0^2\, 2\pi i - \varrho U' \pi R_0^2 = \pi R_0^2 \varrho U', \quad Y_{\text{inst}} = 0. \tag{2.90}$$

Bildet man diesen Kreiszylinder der z-Ebene auf einen elliptischen Zylinder in der ζ-Ebene ab mittels $\zeta = z + c^2/z$ ($c^2 > 0$ oder auch $c^2 < 0$), so wird dort

$$\begin{aligned} \oint_{K_\zeta} F(\zeta)\, d\zeta &= \oint_{K_z} F(z)\frac{d\zeta}{dz}\, dz = \oint_{K_z} U\,\frac{z^2 + R_0^2}{z} \cdot \frac{z^2 - c^2}{z^2}\, dz \\ &= 2\pi i\, U(R_0^2 - c^2). \end{aligned} \tag{2.91}$$

Die Halbachsen der Ellipse in der ζ-Ebene sind: in Bewegungsrichtung $a = R_0 + c^2/R_0$, und senkrecht dazu $b = R_0 - c^2/R_0$; die Querschnittsfläche ist hier $A_\zeta = \pi ab$. Somit wird für einen elliptischen Zylinder:

$$X = X_{\text{inst}} = 2\pi\varrho U'(R_0^2 - c^2) - \pi\varrho U' ab = \pi\varrho b^2 U', \tag{2.92}$$

unabhängig von a, und $Y = 0$.

Man kann diese Ergebnisse folgendermaßen deuten. Zur Bewegung eines Zylinders von der Masse m muß einerseits sein eigener Trägheitswiderstand $m \cdot U'$ überwunden werden. Ist der Zylinder von ruhender, idealer Flüssigkeit um-

geben, so ist außerdem noch der Trägheitswiderstand zu überwinden, den diese einer Änderung der Körperbewegung entgegensetzt. Zumindest bei der betrachteten Translationsbewegung läßt sich dieser Flüssigkeitswiderstand durch eine zusätzliche Masse m_{zus} beschreiben, die nur von der Körperform (und der Flüssigkeitsdichte) abhängt, aber nicht von der Beschleunigung $U'(t)$. Für einen Kreiszylinder ist nun $m_{zus} = \pi R_0^2 \varrho$, also gerade gleich der Flüssigkeitsmasse (je Längeneinheit in Achsrichtung), die der Zylinder verdrängt. Für einen elliptischen Zylinder, der quer zur Richtung der Halbachse b beliebig bewegt wird, ist die zusätzliche Masse $m_{zus} = \pi b^2 \varrho$ unabhängig davon, wie groß die andere Achse a in Bewegungsrichtung ist. Insbesondere wird nach (2.92) für eine senkrecht angeströmte Platte der Breite $B = 2b$ bei ebener Potentialströmung $m_{zus} = (\pi/4) B^2 \varrho$.

Diese Unabhängigkeit der zusätzlichen Massen vom Achsenverhältnis der elliptischen Zylinder gilt übrigens nicht für Rotationsellipsoide, die in Richtung der Drehachse bewegt werden. Für diese wird nämlich $m_{zus} = (4\pi/3) b^3 \cdot f(a/b)$, mit a = Halbachse in Bewegungsrichtung und b = größter Radius senkrecht dazu. Einige Zahlenwerte für f sind:

a/b	0 (Kreisplatte)	1 (Kugel)	4	8
f	$2/\pi = 0{,}636_6$	0,5	$0{,}328_0$	$0{,}234_4$.

Der Trägheitswiderstand gegen instationäre Strömungen, der solchen für ideale Flüssigkeit berechneten zusätzlichen Massen entspricht, gibt das Verhalten wirklicher Flüssigkeiten kleiner Reibung in der Tat gut wieder, sofern die Körper abgerundet sind und nicht zu starke Wirbel verursachen. Die obigen Ergebnisse für Platten sind jedoch schon deshalb nicht realistisch, weil an ihren Kanten die gleiche Singularität (unendlich große Geschwindigkeit) auftritt wie in stationärer Potentialströmung. In wirklichen Flüssigkeiten entstehen statt dessen z. B. an einer scharfkantigen Platte, die senkrecht zu ihrer Ebene hin- und herschwingt, starke Wirbel. Darauf beruht die Wirkung von Schlingerkielen, die die Rollbewegung eines Schiffes um seine Längsachse dämpfen.

2.2.6. Wirbelbewegungen. Wirbel beobachtet man fast bei jedem Strömungsvorgang, sei es in der Kaffeetasse, neben oder hinter einem Schiff oder in einem Wirbelsturm. Dabei versteht man im allgemeinen Sprachgebrauch unter einem Wirbel ein Strömungsgebiet, in dem die Flüssigkeitsteilchen sich näherungsweise auf konzentrischen Kreisen bewegen, so daß es dort geschlossene Linien gibt, längs derer die Zirkulation nicht verschwindet. Das einfachste Modell hierfür ist der oben beschriebene Potentialwirbel, und vor allem in ebener Strömung wird die Darstellung durch einen geraden Wirbelfaden besonders handlich. Allerdings kann man in idealer Flüssigkeit nicht das Entstehen und Vergehen der Wirbel in wirklichen Flüssigkeiten beschreiben, da ja nach den Sätzen von Helmholtz und Thomson die Zirkulation solcher Wirbelfäden räumlich und zeitlich unveränderlich ist. Ebensowenig entspricht der Wirklichkeit die Singularität (für $r \to 0$) im Kern des Wirbelfadens ($v_\varphi = \Gamma/2\pi r$) und die daraus folgende, unendlich große kinetische Energie des Kerns. Diese Singularität stört natürlich gar nicht, wenn sie – wie bei der Umströmung eines Zylinders oder Tragflügels – im Innern des Körpers zu denken ist, und man sich nur für die äußere Strömung interessiert. Aber selbst zur Darstellung freier Wirbel in einer Flüssigkeit ist der Potentialwirbel noch oft brauchbar, wenn man von seinem

Kern absieht. bzw. das Bild der Kernströmung verfeinert. So kann man etwa statt eines Wirbelfadens eine Wirbelröhre mit einem endlichen Kern $0 < r \leqslant r_0$ mit konstanter Rotation $|\boldsymbol{w}| = |\text{rot}\ \boldsymbol{v}| = |1/r \cdot \partial/\partial r\,(r v_\varphi)| = \text{const} = c$ annehmen, der von drehungsfreier Potentialströmung $\boldsymbol{w} = 0$ für $r > r_0$ umgeben ist (Fig. 37). Schreibt man statt der Konstanten c jetzt $c = \Gamma/\pi r_0^2$, so lautet die Geschwindigkeitsverteilung dieses Wirbels $v_\varphi = \Gamma r/2\pi r_0^2$ für $0 < r \leqslant r_0$ und $v_\varphi = \Gamma/2\pi r$ für $r > r_0$. Dies ist bereits eine sehr gute Annäherung an den Wirbel in einer zähen Flüssigkeit (vgl. 3.3.2). Außerhalb des Kerns, also für $r > r_0$ ist die Strömung dieselbe wie um den idealen Wirbelfaden. Im Kern dagegen rotiert die Flüssigkeit wie ein starrer Körper und für $r = 0$ verschwindet die Geschwindigkeit sogar (im Zentrum oder Auge eines Taifuns herrscht Windstille).

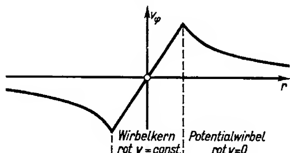


Fig. 37. Angenäherte Geschwindigkeitsverteilung in einem Wirbel

Das drehungsfreie Strömungsfeld eines Potentialwirbels ist durch Ort und Stärke Γ seines Kerns kinematisch bereits bestimmt. Man spricht daher vom Geschwindigkeitsfeld, das ein Wirbel induziert; diese praktische Ausdrucksweise ist aber nicht etwa so zu verstehen, als ob ein Wirbelfaden die Bewegung um ihn physikalisch verursachte. Energetisch verhält es sich nämlich gerade umgekehrt. In Flüssigkeiten geringer Zähigkeit ist der Kernradius r_0 klein gegen die übrigen Strömungsabmessungen, und Drehimpuls und kinetische Energie der drehenden Flüssigkeitsteilchen im Kern sind auch klein gegen die der Strömung außerhalb des Kerns, so daß diese die Bewegung des Wirbelkerns bestimmt. Ist z. B. in einer ruhenden, unbegrenzten Flüssigkeit ein gerader Wirbelfaden, so kreisen die Teilchen um den Kern herum, der selber am gleichen Ort bleibt. Wird diesem Eigenfeld des Wirbels nun ein anderes Geschwindigkeitsfeld überlagert, so ergibt sich überall die Geschwindigkeit durch vektorielle Addition der Komponenten der beiden Felder und der Wirbelkern bewegt sich mit der Geschwindigkeit, die das überlagerte Feld an seinem Ort vorschreibt.

Sieht man von den Vorgängen im Wirbelkern ab, so kann man also auch freie Wirbel in einer Flüssigkeit durch Potentialwirbel darstellen, deren Fortbewegung durch das übrige Geschwindigkeitsfeld vorgeschrieben wird. Sind z. B. zwei unendlich lange, parallele Wirbelfäden Γ_1 und Γ_2 an den Stellen z_1 und z_2 (Abstand $|z_1 - z_2| = a$) in einer unbegrenzten Flüssigkeit, so folgt aus

$$F(z) = \frac{\Gamma_1}{2\pi \mathrm{i}} \ln (z - z_1) + \frac{\Gamma_2}{2\pi \mathrm{i}} \ln (z - z_2) \tag{2.93}$$

für die Eigengeschwindigkeit $\dot{z}_1$ des Wirbels Γ_1 diejenige, die der andere Wirbel Γ_2 am Ort z_1 hervorruft, also $\dot{z}_1 = \Gamma_2/2\pi \mathrm{i}\,(z_1 - z_2)$ und entsprechend wird $\dot{z}_2 = \Gamma_1/2\pi \mathrm{i}\,(z_2 - z_1)$. Zur weiteren Berechnung der Bahnen, auf denen die beiden Wirbelkerne sich fortbewegen, ist es zweckmäßig, den Schwerpunkt der Wirbel einzuführen. Zwei Massen Γ_1 und Γ_2 in z_1 und z_2 hätten ihren Schwerpunkt im Punkt

$$z_s = x_s + \mathrm{i} y_s = \frac{\Gamma_1 z_1 + \Gamma_2 z_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}. \tag{2.94}$$

Dieser Punkt bleibt nun hier stets am gleichen Ort: $\dot{z}_s = 0$, da aus $\dot{z}_1$ und $\dot{z}_2$ folgt, daß $\Gamma_1 \dot{z}_1 + \Gamma_2 \dot{z}_2 = 0$ gilt. Um diesen Schwerpunkt drehen sich die beiden Wirbel mit den Winkelgeschwindigkeiten (vgl. Fig. 38) $\omega_1 = \frac{|\dot{z}_1|}{a_1} = \frac{\Gamma_2}{2\pi a a_1}$ und $\omega_2 = \frac{\Gamma_1}{2\pi a a_2}$. Aus $a_1 = |z_1 - z_s|$ folgt aber $a_1 = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} a$ und $a_2 = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2} a$, so daß $\omega_1 = \omega_2 = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi a^2}$. Ferner ändert sich der Wirbelabstand a nicht mit der Zeit, da die Geschwindigkeiten $\dot{z}_1$ und $\dot{z}_2$ stets senkrecht darauf stehen Die Verbindungslinie der beiden Wirbel bleibt also gleich lang und dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = \omega_2$ um den obigen Schwerpunkt; d. h. die Wirbel bewegen sich auf zwei konzentrischen Kreisen um z_s. Auch bei mehreren Wirbeln bleibt der Schwerpunkt am gleichen Ort. Übrigens bleiben während dieser rein kinematisch bestimmten Wirbelbewegung Gesamt-Impuls und -Energie des Strömungsfeldes konstant.

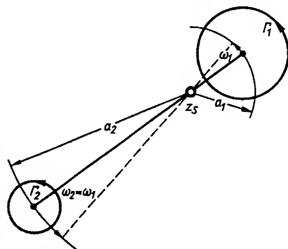
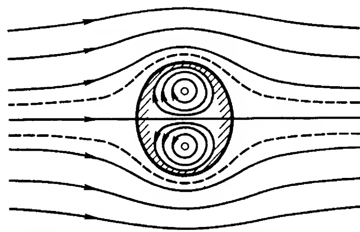


Fig. 38.
Bewegung zweier paralleler Wirbelfäden

Speziell für ein Wirbelpaar mit $\Gamma_1 = -\Gamma_2$ rückt der Schwerpunkt z_s ins Unendliche; bei gleichbleibendem Abstand a bewegen sich die beiden Wirbel geradlinig, senkrecht zu ihrer Verbindungslinie, mit der gleichen Geschwindigkeit $\Gamma_1/2\pi a$ fort. Da hier die Mittelsenkrechte zur Verbindungslinie Symmetrielinie ist, durch die keine Flüssigkeit hindurchfließt, kann sie als feste Wand gedacht werden. Daraus folgt, daß ein einzelner Wirbel Γ im Abstand a_W von einer geraden Wand nicht in Ruhe bleibt, sondern sich mit der Geschwindigkeit $\Gamma/(2\pi \cdot 2a_W)$ parallel zur Wand fortbewegt. Umgekehrt sehen wir daraus, daß man die kinematische Randbedingung einer festen ebenen Wand dadurch leicht erfüllen kann, daß man den betrachteten Wirbel an dieser Wand **spiegelt**, wobei der gespiegelte Wirbel entgegengesetzten Drehsinn haben muß.


Fig. 39.
Stromlinien eines Wirbelpaares, Bezugssystem mit den Wirbeln mitbewegt, oder Umströmung eines Zylinders speziellen Querschnitts

Überlagert man dem Wirbelpaar eine seiner Fortschreitungsrichtung entgegengesetzte Parallelströmung mit der Geschwindigkeit $\Gamma_1/2\pi a$, so bleiben die Wirbel am gleichen Ort, und man erhält so die stationäre Strömung

$$F(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi}\left(\frac{z}{a} + \ln \frac{z + a/2}{z - a/2}\right).$$

Man kann dies als Umströmung eines Zylinders mit dem speziellen, in Fig. 39 gezeichneten Querschnitt auffassen.

Als weiteres Beispiel sind in Fig. 40 die Bahnen eines Wirbelpaares gezeichnet, das schräg auf eine ebene Wand zuläuft. Zu ihrer Berechnung ersetzt man die Wirkung der Wand durch die Spiegelbilder der beiden Wirbel an ihr, wobei der gespiegelte Wirbel jeweils die entgegengesetzte Drehrichtung hat. Das Stromlinienbild dieser vier Wirbel ist und bleibt symmetrisch zur Wand; jeder einzelne Wirbel bewegt sich entsprechend dem momentanen Geschwindigkeitsfeld der anderen drei Wirbel. In großer Entfernung von der Wand schreitet das Wirbelpaar zunächst gemeinsam ungestört fort, bis der Einfluß der Wand, bzw. der an ihr gespiegelten Wirbel merklich wird. Schließlich wird in Wandnähe das Paar getrennt, und jeder Wirbel schwimmt in entgegengesetzter Richtung – seinem Drehsinn entsprechend – parallel zur Wand fort.

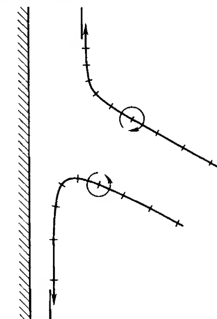


Fig. 40. Bahnen eines Wirbelpaares, das sich einer Wand nähert

Wenn man einen zylindrischen Körper in einer ruhenden Flüssigkeit quer zu seiner Achse in Bewegung setzt, beobachtet man – allerdings nur im Anfangsstadium – oft ein Stromlinienbild ähnlich dem in Fig. 41 mit einem kräftigen **Wirbelpaar** hinter dem Körper. Man hat deshalb schon vor mehreren Jahrzehnten untersucht, inwieweit man dieses Bild durch eine einfache Potentialströmung in idealer Flüssigkeit nachahmen kann. Nimmt man – für einen Kreiszylinder $|z| = R_0$ – einen äußeren Wirbelfaden der Stärke $-\Gamma$ bei $z_{W1} = R_W e^{i\varphi}$ mit $R_W > R_0$ an, so muß man – ähnlich wie bei der ebenen Wand – diesen Wirbel am Kreis R_0 spiegeln, damit der Kreis Stromlinie bleibt. Nach Thomson liegt dieser gespiegelte Wirbel im Kreisinnern bei $z_{W1s} = (R_0^2/R_W)\, e^{i\varphi}$ und hat die entgegengesetzte Zirkulation $+\Gamma$. Die komplexe Strömungsfunktion beider Wirbel lautet dann

$$\frac{-\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z - z_{W1}}{z - z_{W1s}};$$

ihr Imaginärteil, d. h. also die Stromfunktion, wird in der Tat konstant für jeden Punkt auf dem Kreis $z = R_0 e^{i\alpha}$. Ebenso spiegelt man den anderen Außenwirbel $+\Gamma$ bei $z_{W2} = R_W e^{-i\varphi}$. Fügt man noch die oben bereits abgeleitete Potentialströmung für den Kreiszylinder in der Parallelströmung U ohne äußere Singularitäten zu diesen vier Wirbeln hinzu, so erhält man jetzt

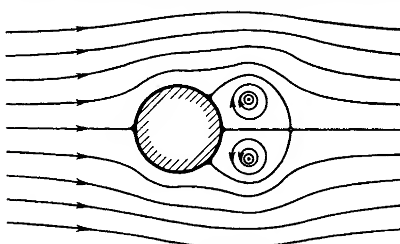


Fig. 41. Kreiszylinder mit Wirbelpaar nach L. Föppl

$$F(z) = U\left(z + \frac{R_0^2}{z}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{(z - R_W e^{i\varphi})(z - R_0^2 e^{-i\varphi}/R_W)}{(z - R_0^2 e^{i\varphi}/R_W)(z - R_W e^{-i\varphi})}. \tag{2.94}$$

Die Fortschreitgeschwindigkeit eines Außenwirbels wird hier bestimmt durch das Feld der gewöhnlichen Potentialströmung um den Zylinder, andererseits durch die Geschwindigkeitsbeiträge, die an seinem Ort von seinem Spiegelbild, dem anderen Außenwirbel und dessen Spiegelbild induziert werden. Die Resultierende dieser vier Geschwindigkeitsvektoren kann nun, wie L. Föppl 1913 gezeigt hat, für besondere Wirbellagen mit zugehörigen speziellen Wirbelstärken gerade verschwinden. Das Wirbelpaar bleibt dann hinter dem Zylinder in Ruhe, und die Strömung ist stationär. Für eine solche Wirbelanordnung sind in Fig. 41 die Stromlinien gezeichnet.

Schließlich kann man derartige Bilder der Umströmung eines Kreiszylinders in der z-Ebene konform auf eine ζ-Ebene abbilden[1]) und erhält z. B. mit $\zeta = z - R_0^2/z$ die Umströmung einer senkrecht angestellten Platte mit einem Wirbelpaar dahinter. Hier gibt es allerdings keine ausgezeichneten Wirbelorte hinter der Platte, in denen den Wirbeln keine Fortschreitungsgeschwindigkeit vom sonstigen Geschwindigkeitsfeld aufgeprägt wird. In Fig. 42 ist daher willkürlich eine momentane Lage des Wirbelpaares angenommen, wie sie etwa in Anfahrtversuchen beobachtet wird. Die Wirbelstärke ist dabei gerade so bestimmt, daß sich an den Plattenkanten eine endliche Abflußgeschwindigkeit ergibt. Denn der Hauptvorteil dieser Modellströmung: Platte mit Wirbelpaar ist ja der, daß man die sonst an den scharfen Kanten auftretende Singularität im Geschwindigkeitsfeld vermeiden kann. Andererseits bewegen sich hier die Wirbelkerne von der Platte fort, so daß man zur Erfüllung der Abflußbedingung im nächsten Zeitpunkt ein Anwachsen der Zirkulation beider Wirbel mit der Zeit voraussetzen müßte, was jedoch mit diesem einfachen Modell nicht erklärt werden kann.

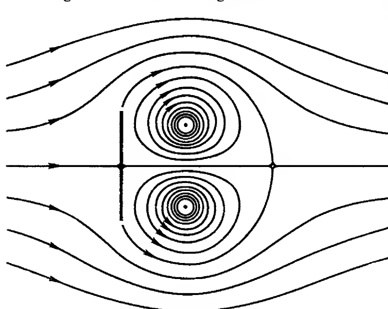


Fig. 42. Senkrecht angeströmte Platte mit Wirbelpaar

Die Stromlinienbilder der Fig. 41 und 42 geben nun die Beobachtungen an anfahrenden Kreiszylindern oder Platten kinematisch schon recht gut wieder. Berechnet man damit dynamische Einzelheiten, wie z. B. die Druckverteilung am Körper und dessen Widerstand, so erweisen sich diese Modellströmungen aber doch noch als unzureichend. Die Annahme, daß die ganze Drehung der Flüssigkeit in den beiden Wirbelkernen konzentriert sei, ist offenbar hierfür eine zu starke Vereinfachung der wirklichen Vorgänge dicht hinter dem Körper (vgl. 3.5.3).

2.2.7. Kármánsche Wirbelstraße. Erfolgreicher ist jedoch eine Beschreibung periodischer Nachlaufströmungen hinter Zylindern durch Wirbelfäden, die v. Kármán 1911 gegeben hat. Bei konstanter, stationärer Anströmung beobachtet man oft, z. B. hinter einem Brückenpfeiler, zwei gegeneinander versetzte,

[1]) Die Zirkulation der Wirbel bleibt dabei zwar unverändert; die Bewegung der Wirbel $\dot{z}_W$ ist jedoch in der neuen Ebene selbst zu berechnen.

parallele Reihen von entgegengesetzt drehenden Wirbeln, etwa wie in Fig. 43. Läßt man die Entstehungsvorgänge dicht hinter dem Zylinder unberücksichtigt, ebenso wie die allmähliche Auflösung der Wirbel infolge der Zähigkeit, die oft erst nach mehreren Perioden in der Wirbelanordnung bemerkbar wird, so kann man als idealisiertes Modell eine unendliche Reihe von Wirbelfäden betrachten.

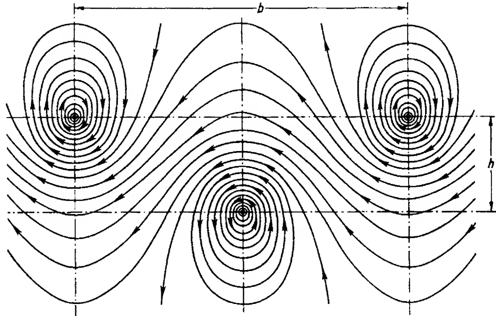


Fig. 43. Stromlinien der Kármánschen Wirbelstraße

Summiert man die komplexen Strömungsfunktionen aller dieser Wirbel, so erhält man mit h = Querabstand der beiden Reihen, l = Wirbelabstand in einer der Reihen (statt b in Fig. 43) und $z_1 = l/4 + \mathrm{i}h/2$:

$$F_W(z) = \frac{-\Gamma}{2\pi \mathrm{i}} \ln \frac{\sin(z - z_1)\,\pi/l}{\sin(z + z_1)\,\pi/l}. \tag{2.95}$$

(Dabei ist die Darstellung der sin-Funktion durch ein unendliches Produkt benutzt worden: $\sin \pi z = \pi z \prod\limits_{\varkappa=1}^{\infty} (1 - z^2/\varkappa^2)$.)

Die Geschwindigkeit am Ort $z \neq z_1$ folgt aus

$$u_W - \mathrm{i}v_W = \mathrm{d}F_W/\mathrm{d}z = \frac{-\Gamma}{2l\mathrm{i}} \left[\cot(z - z_1)\frac{\pi}{l} - \cot(z + z_1)\frac{\pi}{l}\right]. \tag{2.96}$$

Die Eigengeschwindigkeit eines Wirbels, z. B. des Wirbels bei $z = z_1$, also $\dot{z}_1$, berechnet sich aus den Geschwindigkeitskomponenten, die die Wirbel der anderen Reihe an seinem Ort induzieren. Denn die Wirbel der eigenen Reihe können nur Komponenten quer zur Straße in z_1 bewirken, und diese heben sich bei äquidistanter Wirbelanordnung aus Symmetriegründen insgesamt gerade auf. Es wird also für $z = z_1$:

$$\dot{z}_1 = \frac{\Gamma}{2l\mathrm{i}} \cdot \cot 2z_1 \frac{\pi}{l} = \frac{-\Gamma}{2l} \tanh \frac{\pi h}{l} = \dot{x}_1 = u_s;\ \dot{y}_1 = 0. \tag{2.97}$$

Mit dieser Geschwindigkeit u_s bewegt sich irgendein Wirbel, also auch die ganze Wirbelstraße, nach links in negativer x-Richtung. Der in Fig. 44 angegebene Drehsinn der Wirbel entspricht dabei dem Fall, daß ein Körper von rechts nach links mit der Geschwindigkeit U durch die ruhende Flüssigkeit gezogen worden ist; physikalisch sinnvoll ist diese Modellströmung natürlich nur für $u_s < U$, wenn die immer neu gebildeten Wirbel hinter dem Körper zurückbleiben.

Im Versuch beobachtet man meistens eine pendelnde Schlängelbewegung der Wirbelstraße. v. Kármán untersuchte deshalb, ob und wann eine solche Wirbelanordnung überhaupt stabil sein kann. Dazu denkt man sich einzelne Wirbel

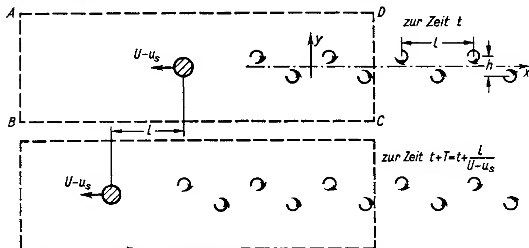


Fig. 44. Zur Anwendung des Impulssatzes auf eine Kármán-Straße

oder ganze Gruppen, aus ihrer skizzierten Nullage verschoben, womit auch ihre von den anderen Wirbeln induzierte Fortschreitungsgeschwindigkeit etwas geändert wird. Es zeigt sich, daß derartige Störungen der Wirbelanordnung zeitlich mehr oder weniger stark anwachsen. Die Wirbelstraße mit der kleinsten Labilität ist dadurch gekennzeichnet, daß das Verhältnis Straßenbreite h zu Teilung l gerade 0,281 beträgt, genauer: wenn $\sinh \pi h/l = 1$, wie auch für Fig. 43 und 44 angenommen wurde. Tatsächlich liegen die beobachteten Teilungsverhältnisse – sogar für einen großen Bereich von Reynolds-Zahlen – in der Nähe dieses speziellen Modellwertes für ideale Flüssigkeiten. Wie eine solche Kármán-Straße im Einzelnen entsteht, und warum sich gerade die am wenigsten labile Anordnung ergibt, bleibt allerdings offen.

Wird nun ein Zylinder in ruhender Flüssigkeit angefahren und mit konstanter Geschwindigkeit U geschleppt, so entsteht zunächst an einer der Seiten ein Wirbel, dann auf der anderen Seite ein gleichstarker Wirbel entgegengesetzter Drehung, und dieser Vorgang wiederholt sich periodisch. Die Wirbel bleiben hinter dem Körper zurück, da sie nur die Absolutgeschwindigkeit $u_s < U$ haben, und bilden eine immer länger werdende Straße; die Zeit T, in der ein neues Wirbelpaar entsteht, ist offenbar $T = l/(U - u_s)$. Während einer solchen Periode T muß zum Schleppen des Körpers die Arbeit $W \cdot U \cdot T$ geleistet werden, wenn W den mittleren Widerstand des Körpers bezeichnet. Um diesen Betrag ist dann die kinetische Energie der ganzen Flüssigkeit in der Zeit T angestiegen, weil inzwischen ein weiteres Wirbelpaar entstanden ist. Leider kann man jedoch

den Widerstand auf diese Weise nicht mit dem Modell des Potentialwirbels berechnen, da dessen kinetische Energie im Kern unendlich wird; man müßte dazu das Bild verfeinern und brauchte eine Abschätzung des Kernradius. Da jedoch die Bewegungsgröße des Kerns eines Potentialwirbels endlich bleibt und klein gegenüber derjenigen der Strömung außerhalb des Kerns ist, so gelingt die Widerstandsberechnung mit dem Impulssatz, wie ebenfalls v. Kármân zeigte. Das d'Alembertsche Paradoxon trifft hier nicht zu, da die periodische Neubildung von Wirbeln ein instationärer Vorgang ist und die vom Körper bewirkte Störströmung, nämlich die Wirbelstraße, beliebig weit hinter den Körper reicht.

In einem Koordinatensystem, in dem die Wirbel ortsfest sind, sei die zeitliche Änderung des Impulses innerhalb einer sehr großen Kontrollfläche betrachtet, deren Schnitt in Fig. 44 vom Rechteck $ABCD$ gebildet wird. Der Körper bewegt sich hier nach links mit der Geschwindigkeit $U-u_s$ in einer Parallelströmung mit der Geschwindigkeit u_s nach rechts. Während der Zeit T, in der sich ein neues Wirbelpaar bildet, rückt der Körper zusammen mit seiner Wirbelschleppe um die Strecke l nach links in $ABCD$ weiter. Der Gesamtimpuls in x-Richtung innerhalb dieser Kontrollfläche wächst also in der Zeit T um $\Delta I=-\int\limits_{x=0}^{l}\int\limits_{y=-\infty}^{+\infty}\varrho u_W\,dx\,dy$. Ist die Wirbelstraße bereits sehr lang, so kann man $u_W=\partial\Psi_W/\partial y$ nach (2.95) für eine unendlich lange Straße einsetzen und erhält $\Delta I=\varrho\Gamma h$. Die mittlere Impulserhöhung je Zeiteinheit durch das Hinzukommen eines neuen Wirbelpaares ist also $\Delta I/T=\varrho\Gamma(U-u_s)h/l$.

Dazu ist nun noch die konvektive Impulsänderung in $ABCD$ in der Zeiteinheit und die Resultierende der Drucke an der Kontrollfläche hinzuzufügen, also die Beiträge, die auch vorhanden wären, wenn die Strömung im wirbelfesten Koordinatensystem stationär wäre:

$$I_*=\varrho\oint[(u_s+u')^2\,dy-(u_s+u')\,v'\,dx]+\oint p\,dy\,. \tag{2.98}$$

Dabei sind u' und v' die vom Körper und seiner Wirbelschleppe verursachten Störgeschwindigkeiten in großer Entfernung, und es ist über den geschlossenen Weg $ABCDA$ zu integrieren. Eliminiert man den Druck durch

$$p+\frac{\varrho}{2}[(u_s+u')^2+v'^2]=f(t)$$

und beachtet, daß geschlossene Integrale über räumliche Konstanten verschwinden, so wird

$$I_*=\frac{\varrho}{2}\oint[(u_s+u')^2-v'^2]\,dy-\varrho\oint(u_s+u')v'\,dx\,. \tag{2.99}$$

Aus Kontinuitätsgründen muß in das Kontrollgebiet ebensoviel einfließen wie ausströmen, es muß daher

$$\oint(u_s+u')\,dy-\oint v'\,dx=0.\quad\text{mit}\quad\oint u_s\,dy=u_s\oint dy=0,$$

gelten, woraus folgt

$$I_*=\frac{\varrho}{2}\oint[(u'^2-v'^2)\,dy-2\,u'v'\,dx]\,. \tag{2.100}$$

Führt man eine Funktion $F'(z)$ ein, so daß $u'-\mathrm{i}v'=dF'/dz$ gilt, so kann man schließlich I_* auch als Imaginärteil eines komplexen Integrals schreiben:

$$I_*=\frac{\varrho}{2}\,\mathrm{I}\left\{\oint\left(\frac{dF'}{dz}\right)^2dz\right\}\,. \tag{2.101}$$

Formal entspricht das völlig der Blasius-Formel (2.68), jedoch wird hier längs eines Weges integriert, der freie Singularitäten in der Strömung einschließt; dieser Weg darf Wirbel nicht berühren, ist aber sonst noch völlig willkürlich.

Das Feld u', v', also die von Körper und Wirbelschleppe bewirkte Strömung, kann nun streng nicht überall angegeben, sondern nur für große Entfernungen vom Körper abgeschätzt werden. Dort verschwinden nämlich u' und v' mindestens so wie bei einer Quelle, also wird $u', v' < 1/r$. Rückt die Kontrollfläche vom Körper weit weg, so verschwinden daher die Integrale über u'^2, v'^2 und $u'v'$ auf der Vorderseite AB und den seitlichen Kontrollflächen BC und DA. Es bleibt nur das Integral über die Rückseite CD, wo die Störgeschwindigkeiten endlich bleiben. In großer Entfernung hinter dem Körper kann das Störfeld durch das einer unendlich langen Wirbelstraße angenähert werden, weshalb man längs CD setzt $u' - \mathrm{i}u' = u_\mathrm{W} - \mathrm{i}\,U_\mathrm{W}$ und $F'(z) = F_\mathrm{W}(z)$. Damit ergibt sich für das Integral jetzt wegen (2.95)

$$I_* = \frac{\varrho}{2}\,\mathrm{I}\left\{\int_{-\mathrm{i}\infty}^{+\mathrm{i}\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F_\mathrm{W}(x=0)\right)^2 \mathrm{d}z\right\} = \frac{\Gamma^2}{2\pi l} - \frac{\Gamma u_\mathrm{s} h}{l}\,. \qquad (2.102)$$

Insgesamt wird damit der Widerstand des Zylinders

$$W = \frac{\Delta I}{T} + I_* = \varrho\Gamma(U - 2u_\mathrm{s})\frac{h}{l} + \frac{\varrho\Gamma^2}{2\pi l}\,. \qquad (2.103)$$

Die am wenigsten labile Anordnung der Wirbel ist gekennzeichnet durch das Verhältnis $h/l = 0{,}281$, woraus $u_\mathrm{s} = \Gamma/2l\sqrt{2}$ folgt. Hierfür wird der Widerstandsbeiwert eines Zylinders, mit d = größter Querabmessung senkrecht zur Anströmrichtung.

$$c_\mathrm{W} = \frac{W}{\frac{\varrho}{2}U^2 d} = \frac{l}{d}\left[1{,}59\,\frac{u_\mathrm{s}}{U} - 0{,}63\left(\frac{u_\mathrm{s}}{U}\right)^2\right]. \qquad (2.104)$$

Die Geschwindigkeit der Wirbelschleppe u_s kann auch durch die Periode T der Wirbelentstehung oder durch deren Frequenz $N = 1/T = (U - u_\mathrm{s})/l$ ausgedrückt werden, bzw. durch die hierfür wesentliche Dimensionslose

$$St = \frac{Nd}{U}\,, \qquad (2.105)$$

die nach Strouhal (1878) benannt wird. Den Zusammenhang zwischen Körperform und -größe (d) und der Wirbelstraße (h oder l und u_s) könnten nur theoretische Untersuchungen über die Wirbelentstehung am Körper selbst erbringen, wobei die Zähigkeit der wirklichen Flüssigkeiten zu berücksichtigen wäre. Bisher ist es jedoch noch nicht befriedigend gelungen, die Widerstandstheorie auf diese Weise zu vervollständigen. Immerhin ist es schon ein großer Erfolg, daß man aus der experimentellen Ermittlung kinematischer Größen, nämlich von l/d (etwa aus einer Strömungsaufnahme) und der Wirbelfrequenz N den Widerstand in guter Annäherung an den wirklichen Wert berechnen kann.

Die Strouhal-Zahl für Kreiszylinder ist nach Messungen in einem weiten Reynolds-Zahl-Bereich, etwa für $500 < Re = Ud/\nu < 5 \cdot 10^4$, nahezu konstant: $St = 0{,}18 \div 0{,}20$. Ähnliche Werte ($0{,}15 \div 0{,}18$) ergeben sich für ebene Platten, wenn der Anstellwinkel größer als 30° ist. Die Periodizität der Nachlaufströmung kann akustisch direkt gehört werden, wie z. B. beim Singen der Telegraphen-

drähte im Wind. Sie kann aber auch an Bauwerken im Wind, z. B. an Schornsteinen oder Brückenteilen, Schwingungen durch Resonanz mit Eigenfrequenzen verursachen.

2.2.8. Diskontinuierliche Strömungen

2.2.8.1. Trennungsflächen und Wirbelentstehung. In einer reibungslosen Flüssigkeit können Flüssigkeitsschichten aneinander vorbeigleiten, ohne daß eine Schubspannung zwischen ihnen entsteht. Nach Helmholtz (1821–1894) widerspricht es daher dem Modell der idealen Flüssigkeit durchaus nicht, selbst endlich große Sprünge der tangentialen Geschwindigkeiten zweier benachbarter Schichten zuzulassen. Die zu einer solchen Diskontinuitätsfläche senkrechten Geschwindigkeitskomponenten müssen jedoch – ebenso wie der Druck – auf beiden Seiten gleich groß sein; denn in einer inkompressiblen Flüssigkeit entspräche einem Sprung der Geschwindigkeit oder des Drucks in Strömungsrichtung eine unendliche Beschleunigung oder Verzögerung. Erst in kompressiblen Gasen ist eine solche plötzliche Verlangsamung möglich, verbunden mit einem praktisch unstetigen Anwachsen der Dichte (Verdichtungsstoß).

Solche Diskontinuitäten ergeben sich zwangsläufig dort, wo zwei Strömungen der gleichen Flüssigkeit, aber verschiedener Herkunft, zusammentreffen, wie z. B. die ausgeatmete Luft und die umgebende Luft. Denn gewöhnlich wird die Bernoulli-Konstante beider Ströme verschieden groß sein; da der Druck auf beiden Seiten ihrer Trennungsfläche gleich ist, sind dann die Geschwindigkeiten verschieden groß. In wirklichen Flüssigkeiten wird zwar der Geschwindigkeitssprung durch die Zähigkeit verschmiert zu einem stetigen Übergang in einer endlich dicken Trennungsschicht; für Flüssigkeiten oder Gase kleiner Reibung bleibt jedoch die Darstellung durch einen unstetigen Sprung eine gute Näherung.

Trennungsflächen, längs derer die Geschwindigkeit ihren Betrag oder auch nur ihre Richtung unstetig ändert, kann man kinematisch auch als Wirbelflächen auffassen. Als einfachstes Beispiel sei die ebene Strömung betrachtet, die einer flächenhaften Verteilung von Wirbeln der Stärke $\gamma(\xi)\,d\xi$ auf der Abszisse der z-Ebene entspricht:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\xi)\ln(z-\xi)\,d\xi, \quad u - iv = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma(\xi)}{z-\xi}\,d\xi. \tag{2.106}$$

Ist insbesondere die Stärke der Wirbelschicht überall gleich: $\gamma(\xi) = \gamma$ für $-\infty < \xi < +\infty$, so wird

$$u = -\frac{y\gamma}{2\pi}\int \frac{d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} = \frac{\gamma}{2\pi}\left[\arctan\frac{(x-\xi)}{y}\right]_{-\infty}^{\xi\to+\infty} = \frac{\mp\gamma}{2}$$

für $y > 0$ bzw. $y < 0$ und

$$v = \frac{\gamma}{2\pi}\int \frac{(x-\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} = -\frac{\gamma}{4\pi}\left[\ln(x-\xi)^2 + y^2\right]_{-\infty}^{\xi\to+\infty} = 0\,.$$

Überlagert man noch eine Parallelströmung $U = \gamma/2$, so ist die Flüssigkeit im ganzen oberen Halbraum $y > 0$ in Ruhe, während sie in der unteren Halbebene $y < 0$ überall mit der Geschwindigkeit γ nach rechts strömt (falls $\gamma > 0$).

Allerdings sind derartige Trennungsflächen nicht stabil, sondern verformen sich sehr schnell nach ihrer Entstehung. Wenn etwa die obige Wirbelschicht in einer überlagerten Parallelströmung durch eine schwache Störung leicht gewellt worden ist wie in Fig. 45, so werden im unteren Strömungsgebiet in den Wellenbergen die Stromlinien (im mit der Parallelströmung mitbewegten System) auseinandergezogen sein, in den Tälern dagegen zusammengedrängt; d. h. es wird nach Bernoulli (bei stationärer Strömung) an den Wellenbergen Überdruck und in den Tälern Unterdruck herrschen. Analog werden im oberen Strömungsgebiet an entsprechenden Stellen diese Druckunterschiede noch verstärkt werden. Das Druckfeld ist also so gerichtet, daß die Anfangsstörung noch weiter verstärkt wird. Die schwierige formelmäßige Verfolgung dieses Vorgangs zeigt, daß die Wellung immer stärker wird und die Schicht schließlich in eine Reihe von Wirbeln zerfällt, in denen die ursprünglich linienförmig verteilte Rotation konzentriert wird. Das entspricht auch Beobachtungen wie z. B. bei der Kármánschen Wirbelstraße.

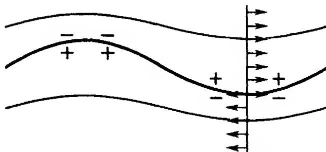


Fig. 45. Zur Instabilität einer Trennungsschicht

In wirklichen Flüssigkeiten ist die Zähigkeit die Ursache für das Entstehen von Trennungsschichten, die jedoch – wenn die Zähigkeit klein ist – genügend genau durch Trennungsflächen reibungsloser Flüssigkeiten beschrieben werden können. Dieser Vorgang soll deshalb am Beispiel eines quer angeströmten Zylinders (Fig. 46) schon hier kurz erläutert werden. Da auch Flüssigkeiten beliebig kleiner Reibung an festen Wänden haften, unterscheidet sich die wirkliche Strömung von der Potentialströmung bereits an der Vorderseite zumindest durch eine dünne Grenzschicht, in der die Tangentialgeschwindigkeit v_t vom Wert $v_t = 0$ für den Wandabstand $n = 0$ ansteigt auf den Wert $v_t(n = \delta)$ am Rand der Schicht mit der Dicke δ. Je kleiner die Zähigkeit ist ($Re \to \infty$), desto dünner ist diese Schicht, desto größer wird aber der Geschwindigkeitsanstieg $\partial v_t/\partial n$ in ihr. In Wandnähe kann die Normalgeschwindigkeit v_n offenbar nur klein gegen v_t sein, so daß erst recht ihre Ableitung längs der Wand $\partial v_n/\partial t$ gegenüber $\partial v_t/\partial n$ vernachlässigt werden kann. Daher ist in der Grenzschicht der Betrag der Drehung $|\text{rot}\, \boldsymbol{v}| = |\partial v_t/\partial n| \neq 0$. Als Maß für die Wirbelproduktion in der Schicht kann man nun einen Wirbelfluß W definieren als Produkt der in der Zeiteinheit durch die Schicht strömenden Menge und ihrer Drehung an der Stelle x, also

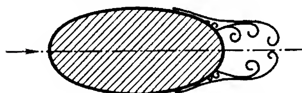


Fig. 46.
Ablösung der Grenzschicht und Wirbelnachlauf

$$W = \int_0^\delta v_t \, dn \cdot |\text{rot}\, \boldsymbol{v}| = \int_0^\delta v_t \frac{\partial v_t}{\partial n} \, dn = \frac{1}{2} v_t^2 (x, n = \delta) . \qquad (2.107)$$

Im Grenzfall kleiner Zähigkeit, d. h. solange in der Schicht $\partial v_n/\partial t \ll \partial v_t/\partial n$, hängt der Wirbelfluß also gar nicht von der Geschwindigkeitsverteilung in der Schicht ab; insbesondere ist er unabhängig von der Dicke der Schicht. Außerhalb der Grenzschicht wird nun der Gradient $\partial v_t/\partial n$ so klein, daß die zähen Schubspannungen keine Rolle spielen und wieder drehungsfreie Potentialströmung angenommen werden kann.

Diejenigen Flüssigkeitsteilchen der Anströmung, die in die Nähe des vorderen Staupunktes gelangt waren, werden nun durch das Druckgefälle der äußeren Potentialströmung, das sich stetig in die Grenzschicht fortpflanzt, längs der Zylindervorderseite beschleunigt. Von der höchsten Stelle des Zylinders an ist aber das Druckfeld entgegengesetzt der Strömungsrichtung. In reibungsloser Flüssigkeit wären die wandnahen Teilchen auf der Vorderseite gerade auf eine solche kinetische Energie beschleunigt worden, daß sie auf der Rückseite trotz des dort herrschenden Druckanstiegs wieder bis in die Nähe des hinteren Staupunkts kämen. Demgegenüber sind sie aber in wirklichen Flüssigkeiten durch die Zähigkeit auf ihrem Weg vom vorderen Staupunkt so stark abgebremst worden, daß der Druckanstieg an der Rückseite sie zum Stillstand oder sogar zur Rückströmung zwingt. An einer bestimmten Stelle der Zylinderrückseite sammeln sich somit völlig abgebremste Teilchen an; die Grenzschicht wird dadurch schnell dicker als sie es davor ist, und löst sich vom Körper ab. Mit der Grenzschichtflüssigkeit, die hier den Körper verläßt, gelangt aber auch ihr Wirbelfluß in die bisher als drehungsfrei angenommene Außenströmung, und dieser Vorgang kann näherungsweise durch eine Trennungsfläche beschrieben werden, die im Ablösepunkt beginnt. Diese Trennungs- oder Wirbelfläche wiederum ist instabil und rollt sich kurz hinter dem Körper mehr oder weniger regelmäßig zu Einzelwirbeln zusammen.

Im allgemeinen lassen sich all diese Teilvorgänge noch nicht rechnerisch verfolgen. So gelingt z. B. die grenzschichtmäßige Berechnung der Ablösestelle an einem Körper mit stumpfem Hinterende erst dann, wenn das wirkliche Druckfeld der Außenströmung bekannt, also experimentell ermittelt worden ist; und dieses hängt wesentlich von dem Totwasser ab, also wiederum von der Ablösestelle. Wenn der Körper scharfe Kanten aufweist, wie etwa eine senkrecht angeströmte Platte, so fallen Ablösepunkt und Anfang der Trennungsfläche in die Plattenkante, weil sonst der Sprung zwischen Druckabfall auf der Vorderseite und Druckanstieg auf der Rückseite unendlich groß würde. Nicht berechenbar bleibt jedoch noch das Aufrollen der Trennungsschicht und die entstehende Nachlaufströmung. Bei der Anfahrt eines Tragflügels entsteht im ersten Moment aus den Normaldrucken, die das Profil auf die ruhende Flüssigkeit ausübt, eine zirkulationsfreie Potentialströmung. An der Hinterkante würde daher die Geschwindigkeit unendlich groß, wenn sich nicht dort sofort eine Trennungsschicht ausbildete. Diese hinter dem Flügel zurückbleibende Wirbelschicht rollt sich dann zu dem sogenannten Anfahrtwirbel zusammen. Ist der Flügel auf eine konstantbleibende Geschwindigkeit beschleunigt, so haben sich nach kurzer Zeit oben und unten am Profil zwei Grenzschichten derart gebildet, daß die Strömung an der Hinterkante glatt abfließt; bei großer *Re*-Zahl kann diese – abgesehen von der Wandnähe – wieder durch eine Potentialströmung mit Zirkulation beschrieben werden. Die Trennungsschicht erlischt, und die Zirkulation um das Profil ist entgegengesetzt gleich der Zirkulation des Anfahrtwirbels. Eine beliebige flüssige Linie um das ursprünglich ruhende Profil deformiert sich dabei so, daß sie stets das Profil und die Trennungsschicht bzw. den Anfahrtwirbel umschließt. Auf ihr bleibt daher (für $Re \to \infty$) die Gesamtzirkulation null, wie es dem Thomsonschen Satz entspricht.

2.2.8.2 Platte mit Totwasser. Hinter einem angeströmten Körper mit stumpfem Hinterende beobachtet man ein mehr oder weniger großes Gebiet – das sogenannte Totwasser –, in dem die Flüssigkeit, von Körper aus gesehen, im Mittel fast stillsteht, wenn man von ihrer Verwirbelung absieht. Im idealisierten Modell ersetzt man nun dieses Totwasser durch ein Gebiet ruhender Flüssigkeit ($\boldsymbol{v}_T = 0$), so daß man dort auch den statischen Druck p_T als konstant annehmen muß. Dieser Druck herrscht auch noch auf dem Rand $p_R = p_T$ und geht stetig in den Druck der Potentialströmung über, die vor dem Körper und neben dem jetzt scharf begrenzten Totwasser vorausgesetzt wird. In ihr gilt die Bernoulli-Gleichung bis zum Rand, so daß mit $p_R = \text{const}$ auch der Betrag der Geschwindigkeit $|\boldsymbol{v}_R|$ auf dem Rand konstant ist. Von diesem Wert springt die Geschwindigkeit auf dem Rand unstetig auf den Wert null im Innern des Totwassers. Der Ort des Totwasserrandes, der zugleich freie Stromlinie ist, ist zunächst unbekannt. Insbesondere läßt sich für Körper mit abgerundeten Querschnittsformen – zumindest im Rahmen des Modells der reibungslosen Flüssigkeit – keine Bedingung für den Beginn der freien Stromlinien am Körper an-

Fig. 47. a) Ebene Potentialströmung um eine Platte mit und ohne Totwasser (Stromlinien und Isobaren) bei senkrechter Anströmung
b) Platte mit Totwasser: Hodographenebene $\bar{v}$
c) Platte mit Totwasser: t-Ebene

geben, d. h. für den Ort, an dem sich die Strömung vom Körper ablöst. An Körpern mit Ecken oder gar Kanten quer zur Anströmungsrichtung wird man dagegen das Totwasser an diesen beginnen lassen, um die sonst dort auftretende Singularität der einfachen Potentialströmung (rechtes Bild in Fig. 47a) zu beseitigen. Wenn man schließlich keine zusätzliche Annahme über den Druck p_T im Totwasser benötigen will, denkt man sich das Totwasser bis ins Unendliche reichend, so daß $p_T = p_\infty$ wird. Aus der Bernoulli-Gleichung für die Randstromlinie $p_R + \varrho v_R^2/2 = p_\infty + \varrho U_\infty^2/2$ mit $p_R = p_T = p_\infty$ folgt dann $|v_R| = U_\infty$ = Anströmgeschwindigkeit.

Das einfachste Beispiel einer solchen Helmholtz-Kirchhoffschen Strömung ist die um eine senkrecht angeströmte Platte. In Fig. 47a ist eine horizontale Platte in einer nach unten gerichteten Parallelströmung ($U_\infty = 1$) angenommen, so daß das Strömungsgebiet im Hodographen (vgl. 2.2.3) dem Innern des oberen Halbkreises (Radius = 1) entspricht (Fig. 47b). Bei der Umströmung eines Zylinders wurde die z-Ebene auf die Φ, Ψ-Ebene abgebildet durch $F(z) = \Phi + \mathrm{i}\Psi = U(z + R^2/z)$. Analog dazu kann man hier den Hodographen abbilden auf die untere Halbebene einer t-Ebene durch

$$t = \frac{1}{2}\left(\bar{v} + \frac{1}{\bar{v}}\right). \tag{2.108}$$

(Der Faktor 1/2 ist willkürlich so gewählt, daß die den Plattenkanten entsprechenden Punkte B und D mit $\bar{v} = \mp 1$ bei $t = \mp 1$ liegen; vgl. Fig. 47c.)

Um den Zusammenhang zwischen Φ, Ψ und t zu finden, nimmt man zunächst für die sich im Staupunkt C verzweigende Stromlinie A_1CDA_2 bzw. A_1CBA_3 an: $\Psi = 0$, und ferner $\Phi = 0$ im Staupunkt C. In A_1 wird $\Phi \to -y \to -\infty$, in A_2 oder A_3 wird $\Phi \to +\infty$. In der F-Ebene, mit $F = \Phi + \mathrm{i}\Psi$, fallen dann die beiden freien Stromlinien mit der positiven Abszisse zusammen; die obere Halbebene in F, mit $\Psi > 0$, entspricht in der physikalischen z-Ebene dem rechten Teil des Strömungsgebiets, da dort $v = -\partial\Psi/\partial x < 0$ und $u = \partial\Psi/\partial y > 0$. Jedem Punkt der F-Ebene entsprechen zwei t-Werte (2.108), weshalb der Zusammenhang zwischen F und t quadratisch sein muß; ferner sind Nullpunkt und unendlich ferner Punkt in F und t vertauscht. Daher wird $F = c^2/t^2$, wobei c^2 eine reelle positive Zahl ist.

Alle Stromlinien beginnen in A_1 und enden in A_2 bzw. A_3 in jeder Ebene. Daraus und aus der Symmetrie der Stromlinien zur Abszisse und Ordinate in der t-Ebene könnte man auch unmittelbar auf einen Quadrupol bei $t = 0$ schließen, mit der komplexen Stromfunktion $F = c^2/t^2$.

Mit der Abkürzung $f = F/c^2 = 1/t^2$ wird nun:

$$t = \frac{1}{\sqrt{f}}, \quad \bar{v} = t \pm \sqrt{t^2 - 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1-f}}{\sqrt{f}} = \frac{\sqrt{f}}{1 \mp \sqrt{1-f}}, \tag{2.109}$$

und
$$z = \int \frac{c^2\,\mathrm{d}f}{\bar{v}} = c^2 \left\{ 2\sqrt{f} \mp \left[\sqrt{f}\,\sqrt{1-f} - \mathrm{i}\ln\left(\mathrm{i}\sqrt{f} + \sqrt{1-f}\right)\right]\right\} + \text{const}. \tag{2.110}$$

Das Wurzelvorzeichen ist jeweils so zu wählen, daß $|\bar{v}| \leq 1$ bleibt. Insbesondere ist auf der Platte, zwischen C und D, t reell und $t > 1$, sowie f reell und $f < 1$; hier ist daher das untere Vorzeichen einzusetzen, damit $\bar{v} = u = t - \sqrt{t^2 - 1}$ (für $1 < t < \infty$) endlich bleibt. In C sollte $\Phi = \Psi = 0$, also auch $f = 0$ sein; legt man den Nullpunkt der z-Ebene auch dorthin, so ist die Integrationskonstante gleich null zu setzen. Die Koordinaten von D erhält man dann, indem man $f = 1 - \varepsilon$ mit $\varepsilon \to 0$ setzt:

$$\frac{z_D}{c^2} = 2 + (-\mathrm{i} \ln \mathrm{i}) = 2 + \frac{\pi}{2}.$$

Bezeichnet man die ganze Plattenbreite mit B, so wird $z_D = B/2$ und folglich $c^2 = B/(\pi + 4)$.

Der Plattenwiderstand (je Längeneinheit quer zur Strömungsebene) ergibt sich als Integral über die Druckunterschiede an Vorder- und Rückseite der Platte, wobei noch $p + \varrho v^2/2 = p_\infty + \varrho U_\infty^2/2$ gilt. Damit wird

$$W = 2 \int_0^{B/2} (p - p_\infty)\, \mathrm{d}z = \varrho U_\infty^2 \int_0^{B/2} \left[1 - \left(\frac{v}{U_\infty}\right)^2\right] \mathrm{d}z\,. \tag{2.111}$$

Mit $U_\infty = 1$, $v^2 = \bar{v}^2$ und $\mathrm{d}z = c^2 \mathrm{d}f/\bar{v}$ wird aber

$$\int_0^{B/2} v^2\, \mathrm{d}z = \int_0^1 \bar{v}^2 \frac{c^2}{\bar{v}}\, \mathrm{d}f = c^2 \int_0^1 (1 - \sqrt{1 - f})\frac{\mathrm{d}f}{\sqrt{f}} = c^2 \left(2 - \frac{\pi}{2}\right),$$

und damit

$$W = \varrho U_\infty^2 \left[\frac{B}{2} - c^2\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\varrho}{2} U_\infty^2 B \cdot \frac{2\pi}{\pi + 4} = 0{,}88 \frac{\varrho}{2} U_\infty^2 B\,. \tag{2.112}$$

Längs der freien Stromlinie DA_2 ist f noch immer reell, aber jetzt $f > 1$; hier gilt das obere Zeichen, da in $\bar{v} = u - \mathrm{i}v$ die Komponente $-v = \pm\sqrt{f - 1}/\sqrt{f}$ nach unten gerichtet sein muß. Wenn die Kante D wieder bei $z = B/2$ liegen soll, ist die Integrationskonstante hier gleich $+\pi$ zu setzen. Aus $z(f) = x + \mathrm{i}y$ folgt als Gleichung des Totwasserrandes DA_2:

$$\frac{x}{c^2} = 2\sqrt{f} + \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \frac{y}{c^2} = -\sqrt{f}\sqrt{f-1} + \ln(\sqrt{f} + \sqrt{f-1}) \tag{2.113}$$

mit $f > 1$. Dieser Rand kann bereits kurz hinter der Platte durch die asymptotische Parabel für $f \gg 1$ angenähert werden:

$$-\frac{y}{B/2} \approx \frac{\pi + 4}{8}\left(\frac{x}{B/2} - \frac{\pi}{\pi + 4}\right)^2 + \frac{4}{\pi + 4}\,. \tag{2.114}$$

Das Totwasser wird also immer breiter und reicht bis ins Unendliche. Deshalb steht der eben berechnete Widerstand nicht im Widerspruch zum d'Alembertschen Paradoxon, bei dem überall im Unendlichen ungestörte Parallelströmung vorausgesetzt war.

In wirklichen Flüssigkeiten ist der Widerstand aber wesentlich größer, nämlich

$$W_{\mathrm{Exp}} \approx 2{,}0 \cdot \frac{\varrho}{2} U_\infty^2 B \text{ (für } Re > 5000) . \qquad (2.115)$$

Auf der Plattenvorderseite ist zwar die Druckverteilung fast die gleiche wie im obigen Modell, auf der Rückseite ist jedoch $p - p_\infty \approx \mathrm{const} \approx -1{,}1 \cdot \varrho U^2/2$ statt $p - p_\infty = 0$, wie bisher angenommen. Man beobachtet ferner ein endlich großes Totwasser, in dem vor allem der statische Druck nicht konstant ist, da hier eine turbulente Wirbelbewegung vorhanden ist, in der auch der Hauptanteil der Widerstandsleistung mechanisch verloren geht und in Wärme umgewandelt wird. Es sind deshalb Erweiterungen der Helmholtz-Kirchhoffschen Methode vorgeschlagen worden, um wenigstens die Druckverhältnisse im wirklichen Totwasser besser anzunähern; jedoch bleibt dabei stets der Rückseitendruck die große Unbekannte.

Selbst in reibungsloser Flüssigkeit ist die oben berechnete Strömung instabil und somit nur ein nicht erreichbarer Idealfall wegen der starken Labilität der Diskontinuitätsflächen, auf die schon Helmholtz hingewiesen hat. Es gibt aber andere Strömungen, bei denen diese Rechenergebnisse durchaus verwirklicht werden. Das ist dann der Fall, wenn die Diskontinuitätsfläche zugleich Grenzfläche zwischen zwei Strömungsmedien mit sehr unterschiedlicher Dichte ist, wenn also $\varrho_1 \gg \varrho_2$. Es kann nämlich gezeigt werden, daß dann kleine Störungen der Trennungsfläche wesentlich schwächer angefacht werden, als im bisher betrachteten Fall $\varrho_1 = \varrho_2$. (Das ist z. B. auch ein Grund dafür, daß sich ein Wasserstrahl in Luft erst nach einer größeren Länge auflöst als ein Wasserstrahl in sonst ruhendem Wasser.) Diskontinuierliche Potentialströmungen eignen sich daher gut zur Darstellung freier Flüssigkeitsstrahlen sowie von Kavitationsströmungen.

2.2.8.3. Flüssigkeitsstrahlen. Der Rand eines Flüssigkeitsstrahls kann nun als Diskontinuitätsfläche aufgefaßt werden, auf der die Geschwindigkeit unstetig auf den Wert null abfällt, wenn der Strahl von Luft oder ruhender Flüssigkeit umgeben ist. Der Druck am Strahlrand muß überall gleich dem konstanten Außendruck sein, woraus nach Bernoulli folgt, daß auch die Flüssigkeitsgeschwindigkeit am Strahlrand überall gleich groß sein muß, während über die Form dieses freien Randes zunächst keine Aussage möglich ist.

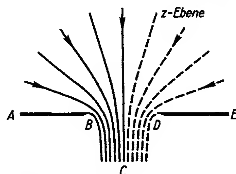


Fig. 48a. Ausflußstrahl aus einem Schlitz (ebene Strömung)

Besonders elegant lassen sich Flüssigkeitsstrahlen dann berechnen, wenn die Strömung eben ist. Es sei deshalb, wie in Fig. 48a, ein Schlitz in einem großen Gefäß angenommen, aus dem infolge eines Überdrucks ein Strahl reibungsloser Flüssigkeit austritt. (Die Schwerkraft sei vernachlässigt.) Potentialtheoretisch ist dies ein gemischtes Randwertproblem: Am Boden des Gefäßes muß $\partial\Phi/\partial n = 0$ gelten, d. h. hier ist die Richtung der Geschwindigkeit vorgeschrieben; der unbekannte, freie Strahlrand ist dagegen eine Stromlinie, auf der mit dem Druck auch der Betrag der

Geschwindigkeit $|v|$ konstant ist. Da somit auf beiden Rändern Aussagen über die Geschwindigkeit bekannt sind, ist es wieder nützlich, die Hodographen-Ebene mit den Koordinaten u und $-\mathrm{i}v$ zu betrachten.

Für das obige Beispiel sei die Endgeschwindigkeit im Strahl gleich 1 gesetzt. In der $\bar{v}$-Ebene entsprechen den festen horizontalen Rändern AB und DE Stücke der Abszisse ($v = 0$, $u > 0$ bzw. $u < 0$) und den Strahlrändern BC und DC Kreisbogenstücke mit dem Radius $|v| = |\bar{v}| = \text{const} = 1$. In großer Entfernung vom Schlitz (A und E) sind im Gefäß die Geschwindigkeiten sehr klein, so daß die Punkte A und E in den Nullpunkt $\bar{v} = 0$ fallen. Alle Stromlinien beginnen in $z = \infty$ ($x \geqslant 0$), also im Punkt $\bar{v} = 0$ und enden in C: $\bar{v} = \mathrm{i}$; d. h. in diesen Punkten der $\bar{v}$-Ebene ist eine Quelle bzw. eine gleichstarke Senke anzunehmen. Dem Strömungsgebiet der z-Ebene: Gefäß und Strahl entspricht in der $\bar{v}$-Ebene das Innere des Halbkreises BCD (Fig. 48b). Solche Kreissektoren lassen sich nun durch die Abbildung $\zeta = \ln \bar{v}$ auf Halbstreifen in einer neuen ζ-Ebene, wie in Fig. 48c, abbilden. Die Punkte A und E rücken wieder ins Unendlich-Ferne, so daß hier im Endlichen als einzige Singularität die Senke in C, also in $\zeta = \ln \mathrm{i} = \mathrm{i}\pi/2$, übrig bleibt. Die Strömung in diesen Halbstreifen der ζ-Ebene kann man nun darstellen durch eine unendliche Reihe von Senken in

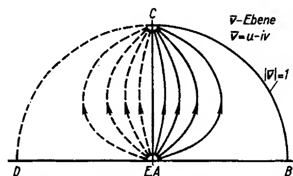


Fig. 48 b. Ausflußstrahl: Hodographenebene $\bar{v}$

$$\zeta = \pm \mathrm{i}\frac{\pi}{2}, \ \pm \mathrm{i}\frac{3\pi}{2}, \ \ldots,$$

also durch

$$F = \Phi + \mathrm{i}\Psi$$
$$= -\frac{q}{2\pi} \ln \sinh\left(\zeta - \frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right). \qquad (2.116)$$

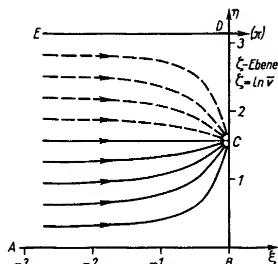


Fig. 48c. Ausflußstrahl: ζ-Ebene

In der z-Ebene verschwindet bei C je Zeiteinheit (und Längeneinheit quer zur z-Ebene) die Menge $b \cdot U = b$, mit b = Strahlbreite und $U = 1$. Die Senke in der ζ-Ebene muß jedoch doppelt so stark sein, also $q = 2b$, da zu ihr auch aus dem rechten Halbstreifen ebenso viel zufließt wie aus dem hier interessierenden linken.

Nun bildet man die Umkehrungen

$$\zeta = \frac{\mathrm{i}\pi}{2} + \operatorname{arsinh} \mathrm{e}^{-f}, \quad \text{mit} \quad f = \frac{\pi F}{b}, \qquad (2.117)$$

und

$$\bar{v} = \mathrm{i}\left(\mathrm{e}^{-f} + \sqrt{1 + \mathrm{e}^{-2f}}\right). \qquad (2.118)$$

Die Integration gibt dann

$$z = \frac{b}{\pi}\int \frac{\mathrm{d}f}{\bar{v}} = \frac{b}{\pi\,\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{-f} - \sqrt{1+\mathrm{e}^{-2f}} + \ln\frac{\mathrm{e}^{-f}+\sqrt{1+\mathrm{e}^{-2f}}+1}{\mathrm{e}^{-f}+\sqrt{1+\mathrm{e}^{-2f}}-1}\right] + \text{const.} \qquad (2.119)$$

Damit ist auch die Strömung in der z-Ebene bekannt, wenn auch nicht in der Form $F = F(z)$, sondern in deren Umkehrung $z = z(F)$.

In B ist $\zeta = 0$, also $\mathrm{e}^{-f} = \sinh(-\mathrm{i}\pi/2) = -\mathrm{i}$ und $f = -3\pi\mathrm{i}/2$ oder $F = -3b\mathrm{i}/2$; d. h. $\Phi = 0$ und $\Psi = -3b/2$. Auf der Stromlinie BC gilt daher $\Psi = -3b/2$ und $\Phi = s$, wenn s die Bogenlänge auf dem Strahlrand bedeutet und vom Punkt B aus gezählt wird; denn es sollte ja auf dem Rand $\partial\Phi/\partial s = U = \text{const} = 1$ erfüllt werden. Ferner gilt dort $\mathrm{e}^{-f} = -\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\pi s/b}$ und $\bar{v} = u - \mathrm{i}\,v = \mathrm{i}\,(-\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\pi s/b} + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2\pi s/b}})$. Wegen $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = U = 1$ auf dem Strahlrand wird $\mathrm{d}x/\mathrm{d}s = u$ und $\mathrm{d}y/\mathrm{d}s = v$, oder integriert

$$x = x_B - \frac{b}{\pi}(\mathrm{e}^{-\pi s/b} - 1) \qquad (2.120)$$

$$y = y_B - s - \frac{b}{\pi}\left[\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2\pi s/b}} + \ln\left(1-\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2\pi s/b}}\right)\right]. \qquad (2.121)$$

Für $s \to \infty$ wird $x_\infty - x_B = b/\pi = B/2 - b/2$, mit B = Schlitzbreite und b = Strahlbreite. Die Strahlkontraktion α – allgemein definiert als Verhältnis Strahlquerschnitt zu Öffnungsfläche – ist also

$$\alpha = \frac{b}{B} = \frac{\pi}{\pi+2} = 0{,}61\,, \qquad (2.122)$$

in guter Übereinstimmung mit dem Versuch, merkwürdigerweise übrigens auch für den Strahl aus einem runden Loch. Vorausgesetzt ist natürlich – dem Hodographen entsprechend – eine scharfkantige Öffnung im ebenen Boden; in einer ausreichend abgerundeten Mündung werden die Stromlinien bereits in der Mündung selbst völlig umgelenkt, so daß sich der hier austretende Strahl nicht weiter zusammenzieht.

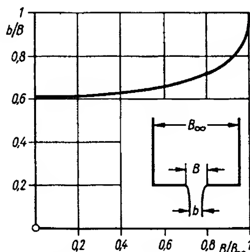


Fig. 49.
Strahlkontraktion (ebene Strömung)

Ähnlich kann man die ebene Strahlströmung aus einem Gefäß mit der endlichen Breite B_∞ berechnen (vgl. Fig. 49). Ist wieder die Endgeschwindigkeit im Strahl gleich 1 gesetzt, so ist die Geschwindigkeit im Gefäß in großer Entfernung vom Spalt nicht mehr null, sondern gleich $\beta = b/B_\infty < 1$ und der entsprechende Punkt F fällt im Hodographen nicht mehr in den Nullpunkt, sondern liegt jetzt bei $\bar{v} = 0 + \mathrm{i}\beta$. Die zugehörige Quelle in F liegt in der ζ-Ebene also nicht mehr im unendlich Fernen, sondern bei $\xi_F = \pm\ln\beta$ und $\eta_F = \pi/2$, so daß jetzt gilt:

$$F(\zeta) = -\frac{b}{\pi}\ln\sinh\left(\zeta - \frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right) + \frac{b}{2\pi}\left[\ln\sinh\left(\zeta - \frac{\mathrm{i}\pi}{2} - \ln\beta\right) + \ln\sinh\left(\zeta - \frac{\mathrm{i}\pi}{2} + \ln\beta\right)\right]. \qquad (2.123)$$

Die weitere Rechnung ergibt für die Strahlkontraktion schließlich:

$$\frac{b}{B} = \frac{1}{1 + \frac{2}{\pi \beta}(1-\beta^2)\arctan\beta}. \tag{2.124}$$

In Fig. 49 ist b/B über $B/B_\infty = \beta B/b$ aufgetragen; die seitlichen Gefäßwände beeinflussen danach die Strahlkontraktion erst bei größeren Öffnungsverhältnissen B/B_∞.

Dreht man die Anordnung um 90° und ersetzt die Symmetrielinie durch eine feste Wand, so kann man diese Strömung auch als eine Lösung des Problems in 2.2.3.3 betrachten: Die Umströmung einer Stufe in einem Parallelkanal. In diesem Fall wäre die Bildung eines Totwassers dargestellt, das hinter der Stufe ins Unendliche reicht und schnell bis zu einer Höhe von $(B-b)/2$ anwächst; an der Stufenkante bliebe die Geschwindigkeit endlich im Gegensatz zur früheren Lösung ohne Totwasser.

2.2.8.4. Kavitation. Bekanntlich kann man Wasser nicht nur durch Erhitzen zum Kochen und Verdampfen bringen, sondern auch dadurch, daß man den äußeren Druck auf den Dampfdruck p_D erniedrigt, ohne die Temperatur zu ändern. Während für eine Wassertemperatur t von 100 °C p_D gleich dem normalen Atmosphärendruck ist, wird z. B. für $t = 15$ °C $p_D = 0{,}0174\,\mathrm{kp/cm^2}$, also rd. 2% des Atmosphärendrucks. Wenn nun in einer Wasserströmung der statische Druck örtlich unter diesen Druck p_D absinkt, verdampft auch dort Wasser, und es entsteht ein mit Wasserdampf gefüllter Hohlraum. Gleichgewicht herrscht dann, wenn der Druck in dem Hohlraum überall gleich dem Dampfdruck und außerhalb dieser Kavitationsblase größer als p_D ist.

In einer reibungslosen, inkompressiblen und schwerelosen Flüssigkeit ist an ähnlich gelegenen Stellen geometrisch ähnlicher Strömungen die Druckziffer c_p gleich groß; das ist das Verhältnis von statischem Druck – bezogen auf den Druck der ungestörten Flüssigkeit – zum Staudruck der Anströmung: $c_p = (p - p_\infty)/(\varrho U^2/2)$. Da Kavitation dort einsetzt, wo $p \leqslant p_D$, definiert man dementsprechend als Ähnlichkeitsparameter nun die Kavitationszahl

$$\sigma = \frac{p_\infty - p_D}{\varrho U^2/2}. \tag{2.125}$$

Tatsächlich erweist sich auch im Experiment σ als Kenngröße für das Auftreten von Kavitation und für die Größe der Kavitationsblase.

Die Grenze dieser Blase kann nun als Helmholtzsche Diskontinuitätsfläche angesehen werden, auf der der Druck $p = p_D$ und der Geschwindigkeitsbetrag konstant sind. Insbesondere kann die obige Kirchhoff-Strömung um eine senkrecht angeströmte Platte als ebene Kavitationsströmung für den Grenzfall $\sigma = 0$ aufgefaßt werden, da für den Druck im Totwasser $p = p_\infty$ vorausgesetzt worden war. Dieser Druck im Nachlauf (bzw. σ) bestimmt den Widerstand wesentlich mit. Nach Messungen und Näherungstheorien für ebene oder drehsymmetrische Strömungen steigt der Widerstandsbeiwert c_W etwa linear mit der Kavitationszahl σ an. So wird z. B. für eine senkrecht angeströmte Kreisscheibe $c_W = 0{,}80(1 + \sigma)$ für $\sigma < 0{,}5$.

Genauere Untersuchungen – z. B. Photographien mit 10^{-4}s Belichtungsdauer – zeigen allerdings, daß sich die Kavitationsblase aus vielen einzelnen Dampf- und Luftblasen zusammensetzt und die Strömung dort nur im Mittel stationär

ist. Ferner setzt Verdampfung stets nur an bereits vorhandenen Kernen ein, wie z. B. an mikroskopischen Bläschen von der gewöhnlich in Wasser gelösten Luft. Dort, wo die Dampfblasen wieder kondensieren, und konzentrisch zusammenbrechen, entstehen örtlich sehr hohe Drucke, die feste Körper, z. B. schnellaufende Schiffspropeller, von deren Oberfläche her stark beschädigen können.

2.2.9. Drehsymmetrische Potentialströmungen. Nach den ebenen Strömungen sind die drehsymmetrischen Strömungen einer inkompressiblen Flüssigkeit am einfachsten, wie z. B. die um einen Drehkörper, der parallel zu einer Achse angeströmt wird. Denn auch hier genügen zwei Koordinaten zur Beschreibung: die Koordinate x längs der Drehachse und der Abstand r von der Achse; die zugehörigen Geschwindigkeitskomponenten seien u und v. Die Kontinuitätsgleichung lautet hier

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv) = 0 \tag{2.126}$$

und kann wieder von einer Stokesschen Stromfunktion $\Psi(x,r,t)$ automatisch erfüllt werden, wenn man setzt

$$u = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} \qquad \text{und} \qquad v = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \tag{2.127}$$

Wegen der Axialsymmetrie hat die Drehung des Geschwindigkeitsfeldes nur noch die eine Komponente $\partial v/\partial x - \partial u/\partial r$ senkrecht zur xr-Ebene. Wenn diese überall verschwindet, so existiert auch noch ein Potential $\Phi(x,r,t)$, so daß

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad \text{und} \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \tag{2.128}$$

Wegen der Kontinuitätsgleichung muß Φ wieder die Laplace-Gleichung (hier in Zylinderkoordinaten) erfüllen, also

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \Delta\Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{rr} + \frac{1}{r}\Phi_r = 0. \tag{2.129}$$

Drehungsfreiheit erfordert von der Stromfunktion jedoch jetzt die Erfüllung einer anderen Feldgleichung, nämlich

$$-r\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r}\right) = \Psi_{xx} + \Psi_{rr} - \frac{1}{r}\Psi_r = 0. \tag{2.130}$$

Im Gegensatz zu ebenen Strömungen sind also Φ und Ψ nun nicht mehr konjugierte Funktionen, und es gibt kein Analogon zur komplexen Stromfunktion einer komplexen Variablen; deshalb ist die Berechnung drehsymmetrischer Strömungen viel umständlicher. Nach wie vor kann man jedoch auch solche Strömungen anschaulich durch Superponieren von Singularitäten darstellen.

Das Potential einer Punktquelle war bereits in 1.3.4 angegeben: $\Phi = -Q/4\pi R$, mit R = Abstand von der Quelle und Q = ausfließendes Flüssigkeitsvolumen je Zeiteinheit. Die Geschwindigkeit ist radial von der Quelle weg gerichtet und hat den Betrag $|\boldsymbol{v}| = \partial\Phi/\partial R = Q/4\pi R^2$. Für eine Senke ist die Quellstärke Q

negativ anzusetzen. Überlagert man einer Punktquelle am Ort $x = 0$, $r = 0$ eine Parallelströmung U in x-Richtung, so entsteht die drehsymmetrische Strömung

$$\Phi = Ux - \frac{Q}{4\pi R} = UR\cos\alpha - \frac{Q}{4\pi R}, \tag{2.131}$$

mit $R = +\sqrt{x^2 + r^2}$ und $\alpha =$ Winkel zwischen R und der positiven x-Achse. Die Geschwindigkeiten u und v sind

$$u = \Phi_x = U + \frac{Q\cos\alpha}{4\pi R^2} \quad \text{und} \quad v = \Phi_r = \frac{Q\sin\alpha}{4\pi R^2}. \tag{2.132}$$

Daraus findet man durch Integration die Stromfunktion

$$\Psi = U\frac{r^2}{2} - \frac{Q\cos\alpha}{4\pi} + \text{const.} \tag{3.133}$$

Will man die Drehachse vor der Quelle ($r = 0$, $\alpha = 180°$) als Stromlinie $\Psi = 0$ bezeichnen, so ist für die Integrationskonstante der Wert $-Q/4\pi$ einzusetzen:

$$\Psi = U\frac{r^2}{2} - Q\frac{1 + \cos\alpha}{4\pi}. \tag{2.134}$$

Der Staupunkt $u = v = 0$ liegt auf der Achse ($r = 0$, $R = |x|$) vor der Quelle bei

$$x = -\sqrt{\frac{Q}{4\pi U}}.$$

In diesem Punkt verzweigt sich die Stromlinie $\Psi = 0$, für die gilt:

$$r_0^2 = \frac{Q}{2\pi U}(1 + \cos\alpha); \tag{2.135}$$

weit hinter der Quelle – für $\alpha \to 0$ oder $x \to \infty$ – wird demnach $r_0(x \to \infty) = \sqrt{Q/\pi U}$. Diese Gleichung $r_0(\alpha)$ definiert den räumlichen Halbkörper der Fig. 21, S. 66.

Eine Punktquelle bei $r_1 = 0$, $x_1 = -c$ und eine gleichstarke Senke bei $r_2 = 0$, $x_2 = +c$ ergeben zusammen mit einer Parallelströmung (Fig. 22, S. 67).

$$\Phi = Ux - \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right), \tag{2.136}$$

und

$$\Psi = U\frac{r^2}{2} - \frac{Q}{4\pi}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2). \tag{2.137}$$

Wie bei der analogen ebenen Strömung wird dadurch die Umströmung eines Rankineschen Drehkörpers beschrieben, dessen Kontur aus $\Psi = 0$ zu berechnen ist.

In den beiden Staupunkten bei $x = \pm L$ muß die Differenz der Geschwindigkeiten, die die Quelle und die Senke verursachen, gerade entgegengesetzt gleich der Anströmungsgeschwindigkeit sein, woraus für L folgt

$$\frac{Q}{4\pi}\left[\frac{1}{(L-c)^2} - \frac{1}{(L+c)^2}\right]_1^1 = U; \tag{2.138}$$

die Länge des Körpers ist dann $2L$. Die größte, halbe Breite $r = b$ des Körpers bei $x = 0$ und $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$ ist aus der Gleichung $\Psi = 0$ zu ermitteln:

$$U \frac{b^2}{2} - \frac{Q}{2\pi} \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = 0. \tag{2.139}$$

Läßt man die Quelle und Senke zusammenrücken und gleichzeitig ihre Stärke anwachsen, so daß das Produkt $Q \cdot 2c = M$ endlich bleibt, so erhält man im Grenzfall die Umströmung einer Kugel, dargestellt durch einen räumlichen Dipol mit dem Moment M, dessen Achse mit der Symmetrieachse zusammenfällt (Fig. 24, S. 69). Setzt man nämlich in die obigen Gleichungen für Φ und Ψ $R_{1,2}^2 = R^2 + c^2 \pm 2Rc \cos\alpha$ und $\cos\alpha_{1,2} = (x \pm c)/R_{1,2}$ ein, so wird für $c \to 0$

$$\Phi = Ux + \frac{Mx}{4\pi R^3} \tag{2.140}$$

und

$$\Psi = \frac{Ur^2}{2} - \frac{Mr^2}{4\pi R^3}. \tag{2.141}$$

Danach wird insbesondere $\Psi = 0$ auf der Achse $r = 0$ sowie auf einer Kugel mit dem Radius $R_0 = \sqrt[3]{M/2\pi U}$. Aus $\Phi = (1 + R_0^3/2R^3)\, U R \cos\alpha$ ergibt sich nun die tangentiale Geschwindigkeit v_t auf der Kugel $R = R_0$ durch Differentation von Φ nach der Bogenlänge s zu $v_t = \partial\Phi/\partial s$; zählt man die Bogenlänge vom vorderen Staupunkt aus, so wird $s = \pi R_0 - R_0 \alpha$, also

$$v_t = \frac{\partial\Phi}{\partial s} = -\frac{1}{R_0}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} = \frac{3}{2} U \sin\alpha. \tag{2.142}$$

Die maximale Geschwindigkeit bei $\alpha = 90°$ beträgt somit $(3/2)\,U$; in ebener Strömung, am Zylinder, ist sie doppelt so groß wie die Anströmgeschwindigkeit. Der statische Druck an der Kugel ist nach Bernoulli

$$\frac{p - p_\infty}{\varrho U^2/2} = 1 - \left(\frac{v_t}{U}\right)^2 = 1 - \frac{9}{4}\sin^2\alpha. \tag{2.143}$$

Schließlich kann man eine große Klasse längsangeströmter Drehkörper durch kontinuierliche (oder diskontinuierliche) Quellsenkenverteilungen $q(\xi)\,d\xi$ auf der Drehachse darstellen. Für eine Belegung zwischen $-l < \xi < +l$ muß dabei die Gesamtergiebigkeit $\int_{-l}^{+l} q(\xi)\,d\xi$ verschwinden, wenn man einen geschlossenen Körper darstellen will. Diese Bedingung entfällt, wenn man eine Dipolverteilung $m(\xi)\,d\xi$ auf der Achse ansetzt. Verallgemeinert man die obigen Formeln für die Stromfunktion, so erhält man jetzt mit $\cos\alpha = (x - \xi)/R$ und $R^2 = (x - \xi)^2 + r^2$:

$$\Psi = \frac{Ur^2}{2} - \frac{1}{4\pi}\int_{-l}^{+l} \frac{q(\xi)\cdot(x-\xi)}{[(x-\xi)^2 + r^2]^{1/2}}\,d\xi,$$

bzw.

$$\Psi = \frac{Ur^2}{2} - \frac{1}{4\pi}\int_{-l}^{+l} \frac{m(\xi)\cdot r^2}{[(x-\xi)^2 + r^2]^{3/2}}\,d\xi. \tag{2.144}$$

Partielle Integration der zweiten Formel zeigt, daß eine Quellverteilung dann einer Dipolverteilung gleichwertig ist, wenn $q(\xi) = \mathrm{d}m(\xi)/\mathrm{d}\xi$. Eine konstante Dipolverteilung zwischen $-l < \xi < +l$ gibt speziell

$$\Psi = \frac{U r^2}{2} + \frac{m}{4\pi}\left[\frac{x-l}{\sqrt{(x-l)^2 + r^2}} - \frac{x+l}{\sqrt{(x+l)^2 + r^2}}\right]. \qquad (2.145)$$

Für einen schlanken Drehkörper mit $r_0(\xi) \ll l$ und $\mathrm{d}r_0(\xi)/\mathrm{d}\xi \ll 1$ kann man nun – abgesehen von den Körperenden bei $x \approx \pm l$ – setzen $r_0 \ll |x \mp l|$ und erhält dann aus $\Psi = 0$ für die Körperkontur bei $|x| < l$: $r_0^2 \approx m/\pi U$. Umgekehrt kann man für einen gegebenen schlanken Drehkörper in erster Näherung für die Dipolverteilung $m(\xi) = \pi r_0^2(\xi)\, U$ ansetzen; d. h. das Dipolmoment ist angenähert proportional dem örtlichen Körperquerschnitt und der Anströmgeschwindigkeit.

Mit allgemeineren Quell- und Dipolverteilungen lassen sich schließlich auch dreidimensionale räumliche Potentialströmungen aufstellen, wie z. B. die um schräg angeströmte Rotationskörper oder um Flugzeugrümpfe, die nicht drehsymmetrisch sind.

2.2.10. Tragflügel

2.2.10.1. Ebene Strömung. Die Singularitätenmethode ist in den bisherigen Beispielen nur zur Darstellung der Verdrängungsströmung von längs angeströmten Körpern benutzt worden; hierzu eignen sich Quellen, Senken oder Dipole mit der Achse in Anströmungsrichtung. Man erhält so eine Innen- und eine Außenströmung, die voneinander durch die Oberfläche des Körpers abgegrenzt werden; physikalisch interessiert dann nur die Außenströmung außerhalb des festen Körpers, der durch die Singularitäten im Innern ersetzt wird. Direkter, wenn auch schwieriger in der Durchführung, ist die Methode, auf der Oberfläche des Körpers selbst solche Singularitäten anzunehmen, daß die Geschwindigkeit im Körperinnern überall verschwindet und auf der Oberfläche auf den zunächst noch unbekannten Wert der Außenströmung springt; natürlich muß die ganze Belegung mit der Parallelströmung zusammen wieder ein Geschwindigkeitsfeld erzeugen, dessen Normalkomponente auf der Köroberfläche verschwindet. Der Geschwindigkeitssprung auf der Oberfläche kann dabei durch eine Wirbelbelegung beschrieben werden, wie in 2.2.8.1 für einen Spezialfall gezeigt wurde.

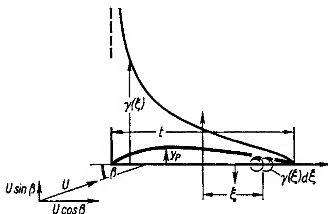


Fig. 50. Schräg angeströmte Platte dargestellt durch eine Wirbelschicht

Als Beispiel hierfür sei die ebene Strömung um eine angestellte dünne Platte in einer Parallelanströmung betrachtet. Wie in Fig. 50 befinde sich eine Wirbelschicht der Stärke $\gamma(\xi)$ auf der Abszisse $(y = 0)$ für $-t/2 < x < +t/2$ in einer stationären Parallelströmung U, die mit der x-Achse den Winkel β bildet. An einem Aufpunkt $(x, y = 0)$ in dieser Schicht induzieren alle Wirbelschicht-

elemente $\gamma(\xi)\,d\xi$ eine Abwärtsgeschwindigkeit – den sogenannten Abwind an der Platte – vom Betrag $-v_s(x) = \int_{-t/2}^{+t/2} \gamma(\xi)\,d\xi/2\pi(\xi - x)$. Für die örtlichen Horizontalgeschwindigkeiten längs der Oberseite $u_s(x, y = +\varepsilon)$ und der Unterseite $u_s(x, y = -\varepsilon)$ der Platte (mit $\varepsilon \approx 0$) folgt aus der Definition der Zirkulation: $\gamma(x) = -u_s(x, +\varepsilon) + u_s(x, -\varepsilon)$; und aus Symmetriegründen gilt $|u_s(x, +\varepsilon)| = |u_s(x, -\varepsilon)| = |\gamma(x)/2|$. Mit der Anströmung $U \cos\beta$ zusammen wird längs der Platte $u(x, \pm\varepsilon) = U \cos\beta \mp \gamma(x)/2$ für $-t/2 < x < t/2$. Die Druckdifferenz zwischen Unter- und Oberseite der Platte wird daher nach Bernoulli $\Delta p(x) = \varrho\gamma(x)\,U\cos\beta$ und damit der Auftrieb $\int_{-t/2}^{+t/2} \Delta p(x)\,dx = \varrho\,U\cos\beta\,\Gamma$, mit Γ = Gesamtzirkulation der Schicht $\int_{-t/2}^{+t/2} \gamma(x)\,dx$, wie nach dem Kutta-Joukowskischen Satz zu erwarten war.

Die Wirbelschicht soll nun eine dünne Platte mit der Tiefe t zwischen $y = 0$ und $x = \pm t/2$ ersetzen. Beschränkt man sich auf eine schwache Störung der Parallelströmung, also auf kleine Anstellwinkel β und schwache Zirkulation $\gamma(\xi)$, so kann man auch eine schwach gekrümmte Platte zwischen $y = 0$ und $x = \pm t/2$ annehmen; ihre Schnittlinie mit der Strömungsebene sei $y_P(x)$ mit $y_P \ll t$ und $dy_P/dx \ll 1$. Berücksichtigt man nämlich nur Glieder erster Ordnung, so lautet die Bedingung, daß die Platte Stromlinie sein soll, folgendermaßen:

$$\frac{dy_P}{dx} = \frac{v}{u} \approx \frac{U\sin\beta - v_s}{U\cos\beta} \approx \beta + \frac{1}{2\pi U}\int_{-t/2}^{+t/2} \frac{\gamma(\xi)\,d\xi}{\xi - x}. \qquad (2.146)$$

Für eine gegebene Plattenform y_P wäre aus dieser Integralgleichung die Wirbelstärke $\gamma(\xi)$ zu ermitteln. Wir wollen jedoch umgekehrt – für einen Spezialfall – die folgende Zirkulationsverteilung der Schicht annehmen:

$$\gamma(\xi) = c\sqrt{\frac{1 - 2\xi/t}{1 + 2\xi/t}}. \qquad (2.147)$$

Mit der Transformation $x = (t/2)\cos\mu$ und $\xi = (t/2)\cos\nu$ wird dann

$$\int_{-t/2}^{+t/2} \frac{\gamma(\xi)\,d\xi}{\xi - x} = +c\int_{\pi}^{0} \frac{1 - \cos\nu}{\cos\mu - \cos\nu}\,d\nu = -\pi c, \text{ für } 0 < \mu < \pi, \qquad (2.148)$$

unabhängig von μ oder x; der Abwind ist also hier überall an der Platte konstant. Folglich wird auch

$$\frac{dy_P}{dx} = \beta - \frac{c}{2U} = \text{const}; \qquad (2.149)$$

d. h. es wird eine ebene Platte dargestellt, die zwischen $y = 0$ und $x = \pm t/2$ mit der Abszisse zusammenfällt: $dy_P/dx = 0$, weshalb $c = 2U\beta$.

Die Gesamtzirkulation der Schicht wird damit

$$\Gamma = \int_{-t/2}^{+t/2} \gamma(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \pi U \beta t, \tag{2.150}$$

und der Auftrieb der Platte (mit $\cos\beta \approx 1$):

$$A = \varrho U \Gamma = \pi \varrho U^2 \beta t \quad \text{und} \quad c_A = \frac{A}{\varrho U^2 t/2} = 2\pi\beta. \tag{2.151}$$

Das Moment der Auftriebskräfte der Plattenstreifen $\mathrm{d}\xi$, bezogen auf den Mittelpunkt der Platte bei $\xi = 0$, wird

$$M = \int_{-t/2}^{+t/2} \xi \cdot \varrho U \gamma(\xi)\,\mathrm{d}\xi = -\frac{\pi}{4}\varrho U^2 t^2 \beta. \tag{2.152}$$

Der Druckpunkt, das ist der Angriffspunkt der resultierenden Kraft auf der Platte, liegt daher bei

$$x_D = \frac{M}{A} = -\frac{t}{4}, \tag{2.153}$$

also auch um $t/4$ hinter der Plattenvorderkante, unabhängig vom Anstellwinkel β. Der schon besprochenen Singularität der Strömung an der Vorderkante entspricht der Anstieg $\gamma(\xi) \to \infty$ für $\xi \to -t/2$. Die Abflußbedingung an der Hinterkante ist hier durch $\gamma(\xi) = 0$ für $\xi = +t/2$ erfüllt worden. Die gleichen Rechenergebnisse erhält man natürlich auch mit der Methode der konformen Abbildung (vgl. 2.2.3.2); die Wirbelschicht $\gamma(\xi)$ zeigt jedoch direkt und anschaulich die Konzentrierung des Auftriebs auf dem vorderen Teil der Platte. Schließlich kann man diese Methode noch verfeinern, indem man außer der Wirbelschicht noch eine Quellsenkenverteilung ansetzt und dadurch die dünne Platte zum endlich dicken Tragflügelprofil aufbläst.

2.2.10.2. Endlich breiter Tragflügel. Wie schon früher erwähnt, werden die obigen Rechnungen für dünne Tragflügel im Versuch gut bestätigt. Um dabei eine ebene Strömung zu verwirklichen, spannt man den angeblasenen Flügel zwischen zwei parallele ebene Seitenwände. Natürlich mißt man auch einen gewissen Reibungswiderstand, der jedoch bei kleinen Anstellwinkeln noch klein gegen den Auftrieb bleibt. Die Grundidee der Prandtlschen Tragflügeltheorie besteht nun darin, auch die räumliche Strömung um einen endlich breiten Flügel dadurch zu berechnen, daß man den Tragflügel wieder durch eine Wirbelschicht ersetzt. Ist die Spannweite oder Breite b des Flügels zwar endlich, aber groß gegen dessen Tiefe t, so kann man sogar in erster Näherung den Flügel durch einen einzigen Wirbelfaden quer zur Anströmungs- oder Flugrichtung ersetzen. Der Anstellwinkel wird als so klein vorausgesetzt, daß die vom Tragflügel erzeugten Störgeschwindigkeiten klein gegen die Flug- bzw. Anströmgeschwindigkeit bleiben.

In der Mitte eines solchen Tragflügels wird man etwa ebene Strömung erwarten, als ob die Breite unendlich groß wäre. Um die seitlichen Flügelränder herum

entsteht jedoch eine Zusatzströmung in Ebenen quer zur Anströmung dadurch, daß auf der Unterseite des Flügels Überdruck und auf der Oberseite Unterdruck herrscht. Die Flüssigkeitsteilchen in Nähe der Flügelenden werden dadurch in eine kreisende Bewegung von der Flügelunterseite über den Rand der Oberseite versetzt, die auch noch hinter dem Flügel anhält. Kinematisch kann man diese Zusatzströmung in erster Näherung durch zwei halbunendliche Wirbelfäden in Strömungsrichtung hinter dem Flügel beschreiben, die an den Flügelenden beginnen. Diese sogenannten freien Wirbel bilden zusammen mit dem **tragenden** Wirbel, der den Flügel ersetzen soll, einen **Hufeisenwirbel** wie in Fig. 51. Da dieses Modell zumindest den Helmholtzschen Wirbelsatz befriedigen muß, wonach in idealer Flüssigkeit ein Wirbelfaden überall gleiche Zirkulation hat und im Endlichen nicht enden kann, muß auch längs des Hufeisenwirbels $\Gamma = \text{const}$ angenommen werden.

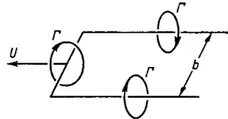


Fig. 51. Hufeisenwirbel

Obwohl das Modell dieses Hufeisenwirbels die Tragflügelströmung natürlich nur ganz summarisch wiedergibt, beschreibt es die Strömung in großen Entfernungen vom Flügel doch schon richtig. Daher kann man nach Prandtl damit berechnen, wie das Gewicht eines Flugzeugs auf den Boden übertragen wird. Die Rechnung sei hier nur skizziert. Durch Spiegelung des Hufeisenwirbels an der Bodenebene wird zunächst die Randbedingung erfüllt, daß dort die Normalgeschwindigkeit verschwinden soll. Die beiden Hufeisenwirbel induzieren am Boden Geschwindigkeitskomponenten (nach **Biot-Savart**), die bei hinreichender Flugzeughöhe h klein gegen die Fluggeschwindigkeit U sind, so daß die Bernoulli-Gleichung für den Bodendruck linearisiert werden kann. Die Zirkulation Γ folgt einfach aus dem Flugzeuggewicht G, das dem Auftrieb gleich ist, so daß $G = A = \varrho U \Gamma b$ (b = Flügelbreite). Ist r die Entfernung eines Punktes auf dem Boden vom Fußpunkt unter dem Flugzeug, so wird dann der zusätzliche Luftdruck am Boden: $\Delta p = Gh/2\pi(h^2 + r^2)^{3/2}$; das Integral dieses drehsymmetrischen Druckbergs über die Bodenfläche gibt natürlich wieder das Flugzeuggewicht.

Die eigentliche Tragflügeltheorie befaßt sich jedoch mit einem verfeinerten Modell. Infolge der Querströmung um die Flügelränder werden dort die Druckunterschiede zwischen Unter- und Oberseite des Flügels, die man auch als Druck- bzw. Saugseite bezeichnet, abgeschwächt. Die Profile (Flügelschnitte) in Randnähe tragen daher zum Gesamtauftrieb weniger bei als in ebener Strömung und dementsprechend nimmt die Zirkulation Γ des tragenden Wirbels zum Rand hin ab. Am Flügelrand selber verschwindet Γ überhaupt, da ja dort jeder Druckunterschied sofort ausgeglichen würde. Die Zirkulation des tragenden Wirbels ist jetzt eine Funktion von z, der Koordinate in Spannweitenrichtung gemessen von der Flügelmitte; es ist also $\Gamma(z) \neq \text{const}$ mit $\Gamma(z = \pm b/2) = 0$. Andererseits kann zwischen der Stelle z und $z + \mathrm{d}z$ die Zirkulationsdifferenz $\mathrm{d}\Gamma = (\mathrm{d}\Gamma/\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}z$ – wegen des Helmholtzschen Satzes – nicht einfach verschwinden; man muß daher ansetzen, daß dort ein freier Wirbelfaden mit dieser Zirkulation $\mathrm{d}\Gamma$ vom tragenden Wirbel abgeht. Insgesamt ergibt sich so statt eines endlichen Hufeisenwirbels ein Wirbelsystem, das aus vielen differentiellen Hufeisenwirbeln besteht, wie in Fig. 52.

Dieses Modell läßt sich auch folgendermaßen begründen. Die Ausgleichströmung vom Überdruckgebiet der Flügelunterseite um die Flügelränder zur Saugseite des Flügels hin lenkt die von vorn ankommenden, parallelen Stromlinien am

Flügel in dem Sinne ab, daß sie auf der Unterseite seitlich divergieren und auf der Oberseite konvergieren. An der Flügelhinterkante kommen beide Stromliniengruppen unter verschiedenen Richtungen wieder zusammen, d. h. es beginnt dort eine Trennungsfläche mit einem Sprung der Geschwindigkeitsrichtung. Da andererseits der Gesamtdruck auf allen Stromlinien gleich groß bleibt und der statische Druck hinter dem Flügel stetig ist, so ist der Betrag der Geschwindigkeit auf beiden Seiten der Trennungsfläche gleich groß. Es ist also eine Trennungsfläche mit einem rein transversalen Geschwindigkeitssprung, die durch eine Schicht von Wirbeln dargestellt werden kann, deren Achsen in Anströmungsrichtung liegen. Dies sind aber gerade die vom Flügel abgehenden freien Wirbel.

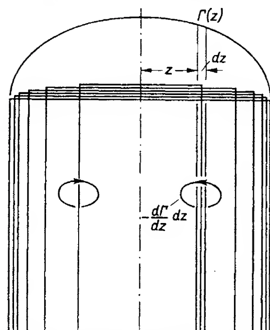


Fig. 52. Das freie Wirbelsystem, das vom tragenden Wirbel abgeht

Mit diesem Wirbelmodell kann nun in erster Näherung abgeschätzt werden, wie sich die Strömungskräfte an einem Flügelprofil zwischen z und $z + dz$ ändern gegenüber der ebenen Strömung am Flügel unendlicher Spannweite. Die direkte Wirkung der Queranströmung w in z-Richtung ist zwar vernachlässigbar, doch ist die damit verbundene Abwärtsgeschwindigkeit $v(z)$ am Ort des Flügels wesentlich. Denn die Anströmung des Flügelprofils ist jetzt nicht mehr horizontal, sondern um den Winkel $\arctan v(z)/U$ geneigt, wie in Fig. 53. Das Profil wird also gar nicht mehr unter dem (kleinen) geometrischen Anstellwinkel β_{geom} angeströmt, – das ist der Winkel zwischen Profilsehne und Horizontale, – sondern nur unter dem effektiven Anstellwinkel

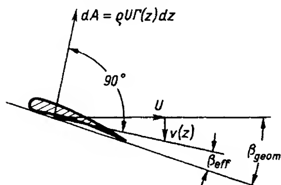


Fig. 53. Anströmung eines Profils des endlich breiten Tragflügels

$$\beta_{eff} = \beta_{geom} - \frac{v(z)}{U}. \tag{2.154}$$

Der Abwind am Ort des tragenden Wirbels oder des Flügels setzt sich zusammen aus den von den freien Wirbeln induzierten Geschwindigkeiten. Ein nach vorn und hinten unendlich langer freier Wirbel $(d\Gamma/dz_*)dz_*$ an der Stelle z_* (und $y = 0$) würde am Flügel an der Stelle z (und $y = 0$) wie in einer ebenen Strömung die vertikale Geschwindigkeit $(d\Gamma/dz_*)dz_*/2\pi(z - z_*)$ induzieren; aus Symmetriegründen sind die Beiträge der halbunendlichen freien Wirbel nur halb so groß. Daher ist der Abwind am Flügel selbst gerade

$$v(z) = \frac{1}{4\pi}\int_{-b/2}^{+b/2}\left(\frac{d\Gamma/dz_*}{z - z_*}\right)dz_*. \tag{2.155}$$

Auf das Element des tragenden Wirbels zwischen z und $z + \mathrm{d}z$ wirkt nun eine Kraft $\mathrm{d}A(z) = \varrho\, U\, \Gamma(z)\,\mathrm{d}z$ senkrecht zur effektiven, örtlichen Anströmungsrichtung (vgl. Fig. 53), die um den kleinen Winkel $v(z)/U$ gegen die Horizontale geneigt ist. Außer dem Auftrieb

$$A = \varrho\, U \int_{-b/2}^{+b/2} \Gamma(z)\,\mathrm{d}z$$

ergibt sich daher noch ein induzierter Widerstand in x-Richtung aus $\mathrm{d}W_i(z) = \mathrm{d}A(z) \cdot v(z)/U$

$$W_i = \varrho \int_{-b/2}^{+b/2} \Gamma(z)\, v(z)\,\mathrm{d}z = \frac{\varrho}{4\pi} \iint_{-b/2}^{+b/2} \frac{\Gamma(z)}{z - z_*} \cdot \frac{\mathrm{d}\Gamma(z_*)}{\mathrm{d}z_*}\,\mathrm{d}z_*\,\mathrm{d}z\,. \tag{2.157}$$

Dieser Widerstand eines endlichen Tragflügels bei stationärer Strömung einer idealen Flüssigkeit ist – ähnlich wie bei den unstetigen Potentialströmungen in 2.2.8.2 – damit zu erklären, daß sich auch hinter dem Flügel eine Wirbelschicht bildet, die in der Zeit Δt um das Stück $U\Delta t$ länger wird. Hinter dem Flügel bleibt daher eine Strömung zurück, deren kinetische Energie in dieser Zeit um einen Betrag vergrößert wird, der gerade der Widerstandsarbeit $W_i\, U \Delta t$ entspricht, die der Motor des Flugzeugs oder des Tragflächenboots in der Zeit Δt abgeben muß.

Diese räumliche Tragflügelströmung ist insofern einfacher zu berechnen als etwa die ebene Strömung um eine senkrecht angeströmte Platte mit Totwasser, weil hier die Lage der Trennungsfläche hinter dem Flügel näherungsweise sofort angegeben werden kann, während dort die Bestimmung der Totwassergrenze das Hauptproblem ist. Außerdem ist das Wirbelmodell hier zutreffender, weil sich die Trennungsfläche des schwächeren transversalen Geschwindigkeitssprungs hinter dem Flügel als weit weniger labil erweist, als die Totwassergrenze. Zumindest bei Flügeln großen Seitenverhältnisses $\Lambda = b^2/F$ = Spannweitenquadrat durch Flügelfläche rollt sich nämlich das freie Wirbelband erst allmählich – weit hinter dem Flügel – zu zwei Einzelwirbeln zusammen, deren Energie in wirklichen Flüssigkeiten dann schließlich durch die Zähigkeit in Wärme umgewandelt wird.

Ein wichtiger Spezialfall für die obige Theorie der tragenden Linie ist der einer elliptischen Zirkulationsverteilung über der Breite:

$$\Gamma(z) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2z}{b}\right)^2} \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}z} = -\frac{2\Gamma_0}{b}\left[1 - \left(\frac{2z}{b}\right)^2\right]^{-1/2} \cdot \frac{2z}{b} \tag{2.158}$$

Wie M. Munk 1919 zeigte, wird dann nämlich bei gegebenem Gesamtauftrieb und fester Flügelspannweite der induzierte Widerstand ein Minimum.
Es wird hierfür wegen (2.155)

$$v(z) = \frac{\Gamma_0}{\pi b^2} \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{z_*\,\mathrm{d}z_*}{(z - z_*)\sqrt{1 - \left(\frac{2z_*}{b}\right)^2}} = \frac{\Gamma_0}{2b}\,; \tag{2.159}$$

der Abwind am Tragflügel ist also konstant über der Spannweite. Für Auftrieb und induzierten Widerstand ergibt sich

$$A = \frac{\pi}{4} \varrho \, U \, \Gamma_0 \, b \tag{2.160}$$

und

$$W_i = \frac{\pi}{8} \varrho \Gamma_0^2 \quad \text{oder} \quad W_i = \frac{A^2}{\left(\pi b^2 \frac{\varrho}{2} U^2\right)}. \tag{2.161}$$

Die dimensionslosen Beiwerte erhält man durch Division mit dem Staudruck und der Flügelfläche F; für diese wird mit Λ = Seitenverhältnis = b^2/F

$$c_{Wi} = \frac{F}{\pi b^2} c_a^2 = \frac{1}{\pi \Lambda} c_a^2. \tag{2.162}$$

Die Polarkurve eines solchen Tragflügels, die sich durch Auftragen von c_a über c_{Wi} für verschiedene Anstellwinkel β ergibt, ist danach eine Parabel. Die gemessene Polare $c_W(c_a)$ unterscheidet sich davon im Wesentlichen nur durch den Profilwiderstand c_{WP}, das ist der reibungs- und zähigkeitsbedingte Druckwiderstand des Flügelprofils in ebener Strömung, der gewöhnlich etwa 0,01 bis 0,02 beträgt. Fig. 54 zeigt die Polare[1]) eines Flügels mit dem Seitenverhältnis 5 und einem gewölbten Profil, das erst bei $\beta_{geom} = -6{,}0°$ keinen Auftrieb erfährt. Die Übereinstimmung mit der obigen Theorie ist überraschend gut bis zu Anstellwinkeln von rd. 10° und ferner bei manchen Flügeln selbst für Seitenverhältnisse 2 oder gar 1. Für jeden Flügelschnitt gilt $dA = \varrho U \Gamma(z) dz = c_a(\beta) \cdot (\varrho/2) U^2 \cdot t(z) dz$. Dabei ist $c_a(\beta)$ der Auftriebsbeiwert des Profils an der Stelle z in ebener Strömung; für die ebene Platte war z. B. $c_a = 2\pi\beta$ abgeleitet worden [Messungen ergeben für verschiedene (endlich dicke) Profile infolge von Grenzschichteinflüssen etwa 10% niedrigere Werte]. Für einen Tragflügel mit überall gleichem Profil und gleichem Anstellwinkel, also mit ähnlichem und unverwundenen Querschnitten, kann man eine elliptische Zirkulationsverteilung

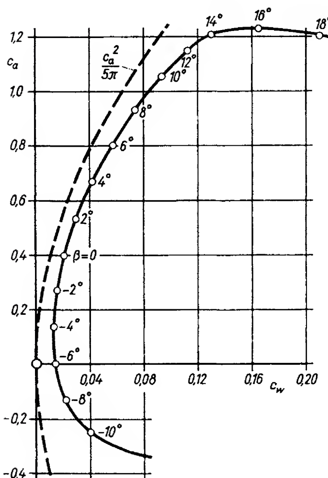


Fig. 54.
Polare eines Tragflügels (Seitenverhältnis 5)

[1]) Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen, Bd. 1 (1921), S. 50.

durch eine elliptische Tiefenverteilung $t(z)$ verwirklichen; als Beispiel zeigt Fig. 55 einen Flügel, dessen Grundriß sich aus zwei Halbellipsen zusammensetzt.

Das Modell der tragenden Linie ist in verschiedenen Hinsichten verfeinert und erweitert worden zur Berechnung von Schiffsrudern, Ringflügeln, Propellern, Pumpen und Turbinen. Voraussetzung ist natürlich, daß die Mach-Zahl klein genug bleibt, um Kompressibilitätseffekte des Strömungsmediums vernachlässigen zu können. Aber auch abgesehen von diesen Effekten mußten neue Modelle geschaffen werden, so z. B. für dreieckförmige Delta-Flügel mit kleinem Seitenverhältnis. Hier bilden sich nämlich an den beiden scharfen Vorderkanten, die von der Spitze des Flügels aus schräg nach hinten verlaufen, Wirbelschichten aus, die sich schon über dem Flügel kegelförmig zusammenrollen. Die Auftriebsverteilung hat dann Maxima in Nähe dieser Vorder- oder Seitenkanten statt in der Flügelmitte wie beim oben beschriebenen Tragflügel mit gerader, gut abgerundeter Vorderkante und großem Seitenverhältnis[1]).



Fig. 55.
Tragflügel mit elliptischer Tiefenverteilung

2.3. Potentialströmungen idealer Gase

2.3.1. Thermodynamische Beziehungen. Die kurzen Ausführungen über das Ausfließen eines idealen Gases aus einem Überdruckkessel in 1.4.2.2 zeigten schon, wieviel komplizierter Gasströmungen sind als die von Flüssigkeiten konstanter Dichte. Es können deshalb hier nur einige Grundelemente der Gasdynamik behandelt werden.

Zunächst seien aus der Thermodynamik einige Begriffe aufgezählt, die die Gleichgewichtszustände ruhender Gase betreffen. Einer abgeschlossenen, wärmeisolierten, ruhenden Gasmenge (Zustand 1) werde eine Wärmemenge Q und eine mechanische Arbeit A irgendwie zugeführt, – etwa durch Verbrennung oder starkes Umrühren. Die dadurch im Gas verursachten Ströme von Temperatur oder Bewegungsgröße klingen nach einiger Zeit ab, und es entsteht wieder ein Gleichgewichtszustand (2) des Gases. Nach dem 1. Hauptsatz sind Wärme und mechanische Arbeit energetisch gleichwertig und können nicht verloren gehen. Es muß also eine Größe geben – die innere Energie E –, die den jeweiligen Gleichgewichtszustand kennzeichnet, und deren Vergrößerung den zugeführten Energien entspricht: $E_2 - E_1 = Q + A$; kalorische und mechanische Größen sind in diesen und den folgenden Gleichungen im gleichen Maßsystem anzugeben. Besteht die mechanische Arbeit nur in einer langsamen Kompression oder Expansion des Gases, was etwa durch leicht bewegliche Kolben verwirklicht werden kann, so ist $\mathrm{d}A = -p\,\mathrm{d}V$, wenn V das Gasvolumen bedeutet. Betrachtet man insbesondere eine Masseneinheit eines Gases, so ist $V = 1/\varrho$ und es wird der Zuwachs der inneren Energie (je Masseneinheit) infolge einer infinitesimalen Wärmezufuhr und Kompression

$$\mathrm{d}e = \delta q - p\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\varrho}\right). \tag{2.163}$$

[1]) Näheres z. B. in B. Thwaites, Incompressible Aerodynamics, Oxford 1960.

Aus dieser Gleichung läßt sich die innere Energie berechnen, indem man sich die Wärme oder Kompressionsarbeit so langsam zugeführt denkt, daß im Gas keine nennenswerten Ströme entstehen. Denn in diesem Spezialfall kann man die Zustandsgleichung des Gases anwenden, die den Zusammenhang zwischen p, ϱ und T für Gleichgewichtszustände angibt. Solche quasistatische Änderungen bestehen dann aus Folgen von Gleichgewichtszuständen, in denen z. B. der jeweilige Druck p innerhalb des Gasvolumens gleich groß ist und damit nur vom momentanen Zustand abhängt. Diese Zustandsänderungen sind auch umkehrbar oder reversibel.

Die Zustandsgleichung für die Masseneinheit eines idealen Gases lautet

$$p = R\varrho T, \quad \text{mit} \quad R = \frac{R_{\text{abs}}}{m}, \tag{2.164}$$

wo R_{abs} die absolute Gaskonstante und m das Molekulargewicht bedeuten. Wird dieser Gasmenge eine Wärmemenge δq zugeführt und dabei eine Volumenänderung verhindert, so steigt die Temperatur um $\mathrm{d}T = \delta q/c_{\text{v}}$. Die so definierte spezifische Wärme c_{v} bei konstantem Volumen ist gewöhnlich unabhängig vom Gaszustand: $c_{\text{v}} = \text{const}$; Abweichungen hiervon und von der obigen Zustandsgleichung zeigen wirkliche Gase erst bei extremen Temperaturen oder Drucken. Mit dem Volumen bleibt hier auch die Dichte unverändert, so daß sich mit $\mathrm{d}(1/\varrho) = 0$ ergibt:

$$e = c_{\text{v}} T + \text{const}. \tag{2.165}$$

Erfolgt die Wärmezufuhr bei konstantem Druck, so gilt $\delta q = c_{\text{p}}\,\mathrm{d}T$ mit $c_{\text{p}} = \text{const} = $ spez. Wärme bei konstantem Druck. Hierbei dehnt sich das Gas aus und leistet Arbeit; wegen $p = R\varrho T = \text{const}$ wird $\mathrm{d}(1/\varrho) = (R/p)\,\mathrm{d}T$. Daher wird jetzt wegen (2.163)

$$\mathrm{d}e = c_{\text{v}}\,\mathrm{d}T = c_{\text{p}}\,\mathrm{d}T - R\,\mathrm{d}T. \tag{2.166}$$

Es muß also gelten $R = c_{\text{p}} - c_{\text{v}} = c_{\text{v}}(\varkappa - 1)$ mit $\varkappa = c_{\text{p}}/c_{\text{v}}$; für zweiatomige Gase, also auch für Luft, wird $\varkappa = 1{,}4$.

Läßt man umgekehrt das Gas langsam expandieren, ohne Wärme zu- oder abzuführen, und entzieht man ihm dabei die Arbeit $p\,\mathrm{d}(1/\varrho)$, so wird $\delta q = 0 = c_{\text{v}}\mathrm{d}T + RT\varrho\,\mathrm{d}(1/\varrho)$, woraus nach Division mit $c_{\text{v}}T$ und Integration die „Adiabate“ folgt:

$$T/\varrho^{\varkappa-1} = \text{const} \quad \text{oder} \quad p/\varrho^{\varkappa} = \text{const} \quad \text{oder} \quad T/p^{(\varkappa-1)/\varkappa} = \text{const}. \tag{2.167}$$

Da die innere Energie Zustandsgröße ist, gilt das für reversible Prozesse berechnete Ergebnis $e = c_{\text{v}}T + \text{const}$ ganz allgemein auch für einen Gleichgewichtszustand, der sich nach ganz beliebigen irreversibeln Vorgängen im Gas eingestellt hat.

Aus e, p und ϱ läßt sich eine weitere nützliche Zustandsgröße bilden, nämlich die Enthalpie (je Masseneinheit) oder der Wärmeinhalt

$$i = e + \frac{p}{\varrho}; \tag{2.168}$$

für ein ideales Gas wird mit den obigen Gleichungen $i = c_p T + \text{const}$. Das Differential der Enthalpie $\mathrm{d}i = \mathrm{d}e + p\,\mathrm{d}(1/\varrho) + (1/\varrho)\,\mathrm{d}p$ unterscheidet sich nun nur um das Glied $(1/\varrho)\,\mathrm{d}p$ vom Differential der Wärmemenge, die dem Gas bei einem quasistatischen und reversiblen Prozeß zugeführt wird: $\delta q_{\text{rev}} = \mathrm{d}e + p\,\mathrm{d}(1/\varrho)$. Dieser Ausdruck ist ein unvollständiges Differential (deshalb auch die Schreibweise δq_{rev}), das aber nach dem zweiten Hauptsatz durch Division mit der absoluten Temperatur zum vollständigen Differential einer neuen Zustandsgröße, nämlich der Entropie s (je Masseneinheit), gemacht werden kann:

$$\mathrm{d}s = \frac{1}{T}\,\delta q_{\text{rev}} = \frac{1}{T}\left[\mathrm{d}e + p\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right] = \frac{1}{T}\left[\mathrm{d}i - \frac{\mathrm{d}p}{\varrho}\right]. \qquad (2.169)$$

Speziell für das ideale Gas läßt sich das leicht zeigen:

$$\mathrm{d}s = \frac{c_v}{T}\,\mathrm{d}T + R\,\varrho\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\varrho}\right) = c_v\left[\mathrm{d}\ln T + (\varkappa - 1)\,\mathrm{d}\ln\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right],$$

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1}\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^{\varkappa - 1}. \qquad (2.170)$$

Mit $p = R\,\varrho\,T$ kann man auch schreiben

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{p_2}{p_1}\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^{\varkappa} = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - (c_p - c_v)\ln\frac{p_2}{p_1}. \qquad (2.171)$$

Die Hauptaussage des zweiten Hauptsatzes ist nun die, daß für ein abgeschlossenes System, das weder Wärme noch Arbeit mit der Umgebung austauscht, diese Entropie nie abnehmen kann; bei jedem irreversiblen Prozeß nimmt sie zu, im Grenzfall eines quasistatischen reversiblen Vorgangs bleibt sie konstant.

Für die adiabatische ($\delta q = 0$), aber quasistatische Ausdehnung eines Gases war für jeden Zwischenzustand $p/\varrho^{\varkappa} = \text{const}$ gefunden worden; dafür wird in der Tat $s_2 - s_1 = 0$, also $s = \text{const}$. Läßt man jedoch ein Gas aus einem Überdruckkessel in einen Vakuumkessel strömen, ohne Wärme ab- oder zuzuführen, so ist das auch eine adiabatische Expansion; es wird aber keine Arbeit geleistet und es entstehen im Gas „Ströme", die erst abklingen müssen, bis wieder ein Gleichgewichtszustand erreicht wird. Dieser Vorgang ist irreversibel. Da weder Wärme noch Arbeit mit der Umgebung ausgetauscht wird, bleibt die innere Energie des Gases unverändert: $e_1 = e_2$, also auch $T_1 = T_2$; die Entropie wird aber um $s_2 - s_1 = c_v(\varkappa - 1)\ln \varrho_1/\varrho_2 > 0$ erhöht. Zur Unterscheidung dieser beiden adiabatischen Zustandsänderungen bezeichnet man die quasistatische besser als Isentrope.

Die obigen Beziehungen lassen sich auch auf ein strömendes Gas übertragen, zumindest solange die Bewegung stetig verläuft. Jedes strömende Gasteilchen steht in dauerndem Druckgleichgewicht mit seiner Umgebung. Es stellt ferner ein adiabatisch abgeschlossenes System dar, solange die Wärmeleitung und die Wärme erzeugende Reibung des Gases vernachlässigbar bleiben. Die Zustandsänderungen des Teilchens sind dann quasistatisch und adiabatisch, also isentrop.

Im allgemeinen Fall wird zwischen den Gasteilchen infolge der Wärmeleitfähigkeit λ des Gases ein Wärmestrom $-\lambda$ grad T entstehen; in ein Einheitsvolumen

fließt dann je Zeiteinheit die Wärmemenge $\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T)$ mehr als ein aus, da nach dem Gaußschen Satz (1.24) $\int \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) \mathrm{d}\tau = \oint \lambda \operatorname{grad} T \cdot d\boldsymbol{F}$. Eine zweite Wärmequelle stellt die Energie je Zeit- und Volumeneinheit dar, die infolge der Reibung mechanisch verloren geht und in Wärme umgewandelt wird, die sogenannte Dissipation D; sie ist proportional der Zähigkeit und einer Summe von Produkten der Geschwindigkeitsgradienten nach verschiedenen Richtungen (vgl. 3.1). Dem Gasteilchen wird somit je Volumen- und Zeiteinheit eine Wärmemenge $\varrho \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ zugeführt, wodurch seine Entropie erhöht wird:

$$\varrho \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \varrho \left(\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + p \frac{\mathrm{d}(1/\varrho)}{\mathrm{d}t}\right) = \varrho T \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = D + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) . \tag{2.172}$$

Integriert man über die Gasmenge innerhalb einer geschlossenen Fläche F, die mit der Strömung mitbewegt wird und das Volumen V einschließt, so bleibt das Massenelement $\mathrm{d}m = \varrho \mathrm{d}\tau$ unverändert und es wird

$$\int_V \varrho \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}\tau = \int_V \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}m = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \varrho s \, \mathrm{d}\tau = \int_V \frac{D}{T} \mathrm{d}\tau + \int_V \frac{1}{T} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) \mathrm{d}\tau .$$

Das letzte Integral kann umgeschrieben und mit dem Gaußschen Satz transformiert werden zu

$$\int_V \left[\operatorname{div}\left(\frac{\lambda}{T} \operatorname{grad} T\right) - \lambda \operatorname{grad} T \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{T}\right] \mathrm{d}\tau = \int_F \frac{\lambda}{T} \operatorname{grad} T \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{F} + \int_V \frac{\lambda}{T^2} (\operatorname{grad} T)^2 \mathrm{d}\tau ;$$

damit wird dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \varrho s \, \mathrm{d}\tau = \int_V \frac{D}{T} \mathrm{d}\tau + \int_V \frac{\lambda}{T^2} (\operatorname{grad} T)^2 \mathrm{d}\tau + \int_F \frac{\lambda}{T} \operatorname{grad} T \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{F} . \tag{2.173}$$

Umschließt F das ganze strömende Gas und wird diesem von außen keine Wärme zu- oder abgeführt, so verschwindet das Integral über die Randfläche $\boldsymbol{F}$; da die Volumenintegrale nur positiv sein können, kann dann auch die Gesamtentropie nur zunehmen.

Da die Zähigkeit μ und Wärmeleitzahl λ von Gasen klein sind, braucht man sie nur dort zu berücksichtigen, wo in einer Strömung große Gradienten der Geschwindigkeit oder Temperatur vorkommen, wie etwa in Grenzschichten oder Unstetigkeitsstellen. Die Effekte beider Eigenschaften sind in Gasen gewöhnlich von gleicher Größenordnung, da die charakteristische Dimensionslose – die Prandtl-Zahl – von der Größenordnung eins ist; diese ist definiert durch $Pr = \mu c_p/\lambda = \nu/a$, mit $a = \lambda/\varrho c_p$ = Temperaturleitzahl. Für Luft ist in einem großen Druck- und Temperaturbereich $Pr = \text{const} = 0{,}72$.

Sehr oft genügt schon das Modell des reibungslosen, nichtwärmeleitenden Gases. Dann bleibt die Entropie längs jeder Stromlinie konstant, und es besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Druck und Dichte nach der Isentrope $p/\varrho^\varkappa = \text{const}$.

2.3.2. Schallgeschwindigkeit. Grundlegende Unterschiede zwischen Strömungen einer inkompressiblen Flüssigkeit und einem kompressiblen Gas ergeben sich daraus, daß sich im Gas Druck- oder Dichtestörungen nur mit endlicher Geschwindigkeit fortpflanzen, während in einem inkompressiblen Strömungsmedium jede lokale Störung momentan das gesamte Strömungsgebiet mehr oder weniger stark beeinflußt. Wir untersuchen nun insbesondere die Fortpflanzung kleiner Störungen in einem ruhenden Gas (Druck p_0, Dichte ϱ_0), bei denen die Druck- und Dichteänderungen klein gegenüber den Ruhewerten bleiben: $|p - p_0| \ll p_0$ und $|\varrho - \varrho_0| \ll \varrho_0$. Dann bleiben auch die Teilchengeschwindigkeiten und deren Gradienten klein, und es kann die Isentrope vorausgesetzt werden. Daher können die Kontinuitäts- und Bewegungsgleichungen linearisiert werden:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho \boldsymbol{v} = 0 \approx \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho_0 \operatorname{div} \boldsymbol{v} \qquad (\mathrm{K} = 2.174)$$

und

$$\varrho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \operatorname{grad} p = 0 \approx \varrho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} p \,. \qquad (\mathrm{E} = 2.175)$$

Aus dem eindeutigen (isentropischen) Zusammenhang zwischen Druck und Dichte folgt $\varrho = \varrho(p)$; daher wird

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{d\varrho}{dp} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \,.$$

Daß das Gas durch eine Drucksteigerung dichter wird, kann man durch die Abkürzung $dp/d\varrho = c(p)^2 > 0$ ausdrücken; für kleine Störungen des Ruhezustands kann ferner $c(p) = c(p_0)$ als konstant angesehen werden. Eliminiert man nun die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ aus der Kontinuitätsgleichung (K) und der Euler-Gleichung (E), indem man

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{K}) - \operatorname{div}(\mathrm{E})$$

bildet, so folgt

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \Delta p \,. \qquad (2.176)$$

Andrerseits gilt wegen $dp/d\varrho = c^2(p_0)$ auch

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varrho \,. \qquad (2.177)$$

Aus der linearisierten Euler-Gleichung folgt $\partial \operatorname{rot} \boldsymbol{v}/\partial t = 0$ und daraus $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$; es existiert ein Geschwindigkeitspotential Φ mit $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \Phi$ und es wird aus (E):

$$0 = \operatorname{grad}\left(\varrho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p\right) \quad \text{oder} \quad \varrho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p = F(t) \,. \qquad (2.178)$$

Die reine Zeitfunktion $F(t)$ kann man in die Definition von Φ aufnehmen, d. h. man kann auch einfach $F(t) = 0$ setzen. Denn die allein interessierenden räumlichen Ableitungen $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \Phi$ oder $\partial \boldsymbol{v}/\partial t = \operatorname{grad} \partial \Phi/\partial t$ werden von einer

additiven Zeitfunktion in Φ garnicht beeinflußt. Somit wird $\partial\varrho/\partial t = (1/c^2)\partial p/\partial t = -(\varrho_0/c^2)\partial^2\Phi/\partial t^2$ und mit (K) schließlich

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = c^2 \Delta\Phi . \tag{2.179}$$

Es ergibt sich also für p, ϱ und Φ die gleiche Schwingungsgleichung. Speziell für eindimensionale Schwingungen (etwa in x-Richtung mit $\Delta = \partial^2/\partial x^2$) ist deren allgemeine Lösung nach D'Alembert

$$p \quad \text{bzw.} \quad \varrho \quad \text{bzw.} \quad \Phi = F(x+ct) + G(x-ct) . \tag{2.180}$$

F und G sind beliebige, zweimal stetig differenzierbare Störfunktionen, die nach beiden Seiten der x-Achse mit der Geschwindigkeit c fortgepflanzt werden, ohne sich dabei zu ändern; denn für $x = \text{const} \pm ct$ bleiben die Werte von G bzw. F unverändert. Betrachtet man speziell eine Störung, die sich nach $x \to +\infty$ fortpflanzt: $\Phi = G(x - ct)$, so wird $u = \partial\Phi/\partial x = G'$, also $\partial u/\partial x = G''$ und $\partial u/\partial t = -cG''$. Die oben gemachte Linearisierungsannahme: die substantielle Geschwindigkeit $u = G'$ sei klein, so daß $\partial u/\partial t \gg u\partial u/\partial x$ gilt, bedeutet also, daß $|u| = |G'| \ll c$ vorausgesetzt werden muß.

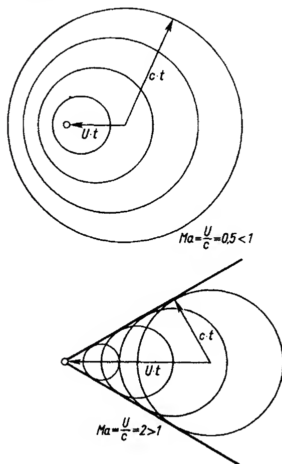


Fig. 56.
Ausbreitung der Störung eines Körpers, der sich mit Unter- bzw. Überschallgeschwindigkeit bewegt

Die Ausbreitung solcher schwacher örtlicher Störungen in einem Gas interessiert offenbar in der Akustik; man nennt daher ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit c die Schallgeschwindigkeit. Aus der Isentrope $p/p_0 = (\varrho/\varrho_0)^\varkappa$ folgt für c^2 beim beliebigen Druck $p = p_0$

$$c^2 = \left(\frac{dp}{d\varrho}\right) = \varkappa\,\frac{p_0}{\varrho_0}\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\varkappa-1} = \frac{\varkappa p}{\varrho} = \varkappa RT = (\varkappa - 1)\,c_p T . \tag{2.181}$$

Die Schallgeschwindigkeit eines idealen Gases hängt demnach nur von der Temperatur ab; z.B. wird für Luft von 15° C $c = 340\,\text{m/s}$.

Die Störung, die ein in ruhender Luft bewegter Körper verursacht, kann in Entfernungen, die groß gegen seine Abmessungen sind, als schwach angesehen werden; sie breitet sich dort, wo die Teilchengeschwindigkeiten $\boldsymbol{v}$ klein gegen c sind, mit der Schallgeschwindigkeit c in Form von Kugelwellen vom momentanen Körperort aus. Ist die Körpergeschwindigkeit U kleiner als die des Schalls $U < c$ oder $Ma = U/c < 1$, so überlagern sich die Kugelwellen, die vom jeweiligen Körperort in aufeinanderfolgenden Zeiten ausgehen, nach allen Richtungen,

wenn auch in verschiedener Stärke, wie in Fig. 56. Bei Überschallgeschwindigkeit $U > c$, $Ma > 1$, ist der Körper in Fig. 56, der zur Zeit t_1 am Ort x_1 eine Kugelwelle ausgesandt hat, zur Zeit $t_2 > t_1$, bereits aus dem Bereich dieser Kugelwelle herausgetreten; denn diese hat dann erst eine Kugel mit dem Radius $c(t_2 - t_1)$ um x_1 erreicht, während der Körper selbst bereits bei $x_2 = x_1 + U(t_2 - t_1) > x_1 + c(t_2 - t_1)$ angelangt ist. Der ganze gestörte Bereich zur Zeit t_2 besteht nach Fig. 56 aus einem Kegel hinter dem Körper mit dem halben Öffnungswinkel α

$$\sin\alpha = \frac{c(t_2 - t_1)}{U(t_2 - t_1)} = \frac{c}{U} = \frac{1}{Ma}. \tag{2.182}$$

Wird umgekehrt ein ruhender Körper von einer Überschallparallelströmung $U > c$ angeströmt, so wird diese nur in diesem Kegel hinter dem Körper verändert. Das ganze übrige Strömungsgebiet vor und neben dem Körper dagegen bleibt völlig unbeeinflußt. Diesem prinzipiellen Unterschied zwischen Unter- und Überschallströmung entspricht auch ein Wechsel im Typus der beschreibenden Differentialgleichungen (vgl. 2.3.9).

2.3.3. Bernoulli- und Energiegleichung. Für stationäre Strömungen eines idealen Gases war bereits in 1.4.1 die Bernoulli-Gleichung abgeleitet worden:

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{\mathrm{d}p}{\varrho} - U = \text{const} \text{ längs jeder Stromlinie.} \tag{1.44}$$

Da hier fortlaufend Gleichgewichtszustände des Gases aufeinander folgen, kann man die Beziehung $T\mathrm{d}s = \mathrm{d}i - \mathrm{d}p/\varrho$ anwenden. Wegen der Isentropie wird speziell $\mathrm{d}i = \mathrm{d}p/\varrho$, so daß man auch schreiben kann:

$$\frac{v^2}{2} + i - U = \text{const} \text{ längs jeder Stromlinie.} \tag{2.183}$$

Diese Gleichung gilt aber sogar allgemeiner als die Bernoulli-Gleichung, wie die folgende direkte Ableitung zeigt. Man betrachtet dazu einen Stromfaden, durch den in der Zeiteinheit eine Gasmasse m fließt, und untersucht nur die Zustände an zwei Querschnitten F_1 und F_2; wegen der Kontinuität ist $m = \varrho_1 F_1 |v_1| = \varrho_2 F_2 |v_2|$. Vom ruhenden System aus gesehen, fließt in den Querschnitt 1 eine gewisse Energie je Zeiteinheit in den Stromfaden, bei 2 eine andere heraus. Diese Energie setzt sich zusammen aus der kinetischen Energie des Gases $m\,v^2/2$, der inneren Energie me und der potentiellen Energie im äußeren Kraftfeld $-mU$. Die Energiedifferenz zwischen 1 und 2 muß nun einerseits der Differenz der Druckarbeiten je Zeiteinheit an den beiden Querschnitten entsprechen, also $p_1 F_1 |v_1| - p_2 F_2 |v_2|$, oder wegen der Kontinuität $(p_1/\varrho_1 - p_2/\varrho_2)\,m$; andererseits könnte noch zwischen den Querschnitten 1 und 2 eine Wärmemenge $q_{12} \cdot m$ von außen zugeführt werden. Somit wird

$$\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} + e_2 - e_1 - (U_2 - U_1) = \frac{p_1}{\varrho_1} - \frac{p_2}{\varrho_2} + q_{12}. \tag{2.184}$$

Äußere Kräfte, wie z. B. die Schwerkraft, spielen jedoch in Gasströmungen kaum eine Rolle. Wärmezufuhr oder -abfuhr nach außen ist ebenfalls nur für

spezielle Probleme von Interesse. Setzt man deshalb $U = 0$ und $q_{12} = 0$ und führt noch die Enthalpie $i = e + p/\varrho$ ein, so wird einfach

$$\frac{v_1^2}{2} + i_1 = \frac{v_2^2}{2} + i_2 . \tag{2.186}$$

Da über die Zwischenzustände des Gases zwischen den Stellen 1 und 2 keine Annahmen gemacht worden sind, muß diese Gleichung, die die Erhaltung der Energie ausdrückt, auch dann noch bestehen, wenn zwischen den Stellen 1 und 2 irreversible Prozesse wie Reibung oder Wärmeleitung stattfinden; wesentlich ist nur, daß an den allein betrachteten Stellen 1 und 2 das Gas im Gleichgewichtszustand ist. Wenn z. B. eine eventuelle Reibungsarbeit zwischen 1 und 2 in nicht umkehrbarer Weise in Wärme umgewandelt wird, so steigt zwar die Entropie an ($s_2 > s_1$); die Energie der Reibungswärme wird jedoch in der inneren Wärme e_2 bzw. in der Enthalpie i_2 durchaus mitberücksichtigt. Nur dann, wenn nirgends irreversible Dissipation auftritt und das Gas an jeder Stelle im Gleichgewichtszustand ist – wie bei isentroper Strömung –, gilt überall längs einer Stromlinie $v^2/2 + i = \text{const}$. Für ein ideales Gas wird nun

$$i = c_p T = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p}{\varrho} = \frac{c^2}{\varkappa - 1} . \tag{2.187}$$

Außer der Ruheschallgeschwindigkeit c_0 des Zustandes $u = u_0 = 0$ ist manchmal auch die kritische Schallgeschwindigkeit c^* des Zustandes $u = u^* = c^*$ eine nützliche Rechengröße. Die Energiegleichung kann dann geschrieben werden

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\varkappa - 1} = \frac{c_0^2}{\varkappa - 1} = \frac{v^{*2}}{2} + \frac{c^{*2}}{\varkappa - 1} = \frac{\varkappa + 1}{2(\varkappa - 1)} c^{*2} , \tag{2.188}$$

woraus folgt

$$\frac{c^{*2}}{c^2} = \frac{(\varkappa - 1) Ma^2 + 2}{\varkappa + 1} , \quad \text{mit} \quad Ma = \frac{|v|}{c} , \quad \text{und} \quad \frac{c^*}{c_0} = \sqrt{\frac{2}{(\varkappa + 1)}} . \tag{2.189}$$

2.3.4. Senkrechter Verdichtungsstoß; Verdünnungswellen. Die denkbar einfachste stationäre Gasströmung, nämlich die eindimensionale Strömung durch einen geraden Stromfaden (z. B. in einem Rohr) mit konstantem Querschnitt ohne Wärmezufuhr, stellt bereits ein Problem dar, während die gleiche Strömung einer inkompressiblen, reibungslosen Flüssigkeit offenbar trivial ist. Betrachten wir wieder zwei Querschnitte, in denen das Gas im Gleichgewicht steht, so lauten die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie mit $F_1 = F_2$ einfach

$$\varrho_1 u_1 = \varrho_2 u_2 \tag{2.190}$$

$$\varrho_1 u_1^2 + p_1 = \varrho_2 u_2^2 + p_2 \tag{2.191}$$

$$\frac{u_1^2}{2} + i_1 = \frac{u_2^2}{2} + i_2 . \tag{2.192}$$

Eliminiert man für ein ideales Gas mit Gl. (2.187) die Enthalpie in der Energiegleichung, so bleiben bei gegebenem Anfangszustand ϱ_1, u_1 und p_1 drei Gleichungen für die Größen ϱ_2, u_2 und p_2. Da diese zum Teil quadratisch sind, ergibt

sich außer der trivialen Lösung $\varrho_2 = \varrho_1$, $u_2 = u_1$ und $p_2 = p_1$ noch eine zweite mögliche Lösung. Und zwar findet man durch geeignetes Eliminieren:

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{\varrho_2/\varrho_1} = \frac{(\varkappa - 1) Ma_1^2 + 2}{(\varkappa + 1) Ma_1^2} = 1 - \frac{2}{\varkappa + 1}\left[1 - \frac{1}{Ma_1^2}\right], \tag{2.193}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\varkappa}{\varkappa + 1}(Ma_1^2 - 1), \tag{2.194}$$

mit $$Ma_1 = \frac{u_1}{\sqrt{\varkappa p_1/\varrho_1}} = \frac{u_1}{c_1}. \tag{2.195}$$

Ferner wird

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{p_2/p_1}{\varrho_2/\varrho_1} = 1 + \frac{2(\varkappa - 1)}{(\varkappa + 1)^2}(Ma_1^2 - 1)\left(\varkappa + \frac{1}{Ma_1^2}\right), \tag{2.196}$$

und $$Ma_2^2 = Ma_1^2 \cdot \left(\frac{\frac{u_2}{c_2}}{\frac{u_1}{c_1}}\right)^2 = \frac{1 + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}(Ma_1^2 - 1)}{1 + \frac{2}{\varkappa + 1}(Ma_1^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{Ma_1^2 - 1}{1 + \frac{2\varkappa}{\varkappa + 1}(Ma_1^2 - 1)}. \tag{2.197}$$

Schließlich kann man Gleichung (2.193) durch Einführen der kritischen Schallgeschwindigkeit c^* nach (2.189) besonders prägnant umschreiben:

$$u_1 \cdot u_2 = c^{*2}. \tag{2.198}$$

Ein ideales Gas mit dem Anströmungszustand 1 kann demnach stromabwärts entweder im selben Zustand weiterströmen oder den Zustand 2 annehmen, aber es gibt keine Zwischenzustände, die mit den Erhaltungssätzen verträglich wären. Wenn hier eine Zustandsänderung eintritt, kann sie also nur unstetig sein. Ein plötzlicher Sprung der Geschwindigkeit oder der Temperatur bedeutete aber unendlich große Gradienten, so daß dort jede noch so kleine Zähigkeit oder Wärmeleitfähigkeit des Gases eine endliche Dissipation zur Folge hätte. In wirklichen Gasen findet der Übergang der Gaszustände freilich nicht unstetig im mathematischen Sinne statt, sondern innerhalb eines endlichen Gebiets; dessen Breite in Strömungsrichtung ergibt sich rechnerisch – bei Berücksichtigung der Zähigkeit und Wärmeleitfähigkeit – aber nur von der Größenordnung der freien Weglänge der Gasmoleküle. Das bedeutet einerseits, daß diese Feinheiten überhaupt nur noch gaskinetisch zu verfolgen sind, andererseits aber, daß man auch in wirklichen Gasströmungen die Zustandsänderung als unstetig ansehen kann, solange deren Darstellung durch ein Kontinuum zulässig ist.

Wesentlich ist nun noch die bisher nicht berücksichtigte Aussage des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik, wonach die Entropie eines adiabatisch abgeschlossenen Systems nicht abnehmen kann. Der Entropiesprung vom Zu-

stand 1 zum Zustand 2 ergibt sich aus den oben bereits berechneten Zustandsgrößen für ein ideales Gas zu

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{p_2}{p_1}\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^{-\varkappa}$$
$$= c_v \ln \left[1 + \frac{2\varkappa}{\varkappa+1}(Ma_1^2 - 1)\right] \cdot \left[1 - \frac{2}{\varkappa+1}\left(1 - \frac{1}{Ma_1^2}\right)\right]^{\varkappa}. \tag{2.199}$$

Erfolgt die Anströmung gerade mit Schallgeschwindigkeit: $Ma_1 = 1$, so kann keine Zustandsänderung eintreten, da dann nicht nur $s_2 = s_1$, sondern auch $u_2 = u_1$, $p_2 = p_1$ usw. Entwickelt man für benachbarte Zustände nach dem Parameter $Ma_1^2 - 1$, so wird

$$s_2 - s_1 = c_v \frac{2\varkappa(\varkappa-1)}{3(\varkappa+1)^2}(Ma_1^2 - 1)^3 - + \cdots \text{höhere Glieder in } (Ma_1^2 - 1). \tag{2.200}$$

Da nur Lösungen mit $s_2 - s_1 \geqslant 0$ thermodynamisch möglich sind, so ist hiernach oder nach der allgemeinen Gleichung für $s_2 - s_1$ eine Zustandsänderung nur dann möglich, wenn $Ma_1 > 1$; und zwar wird dann nach der obigen Formeln $u_2 < u_1$, $\varrho_2 > \varrho_1$, $p_2 > p_1$, $T_2 > T_1$ und $Ma_2 < 1$. Solche unstetigen Übergänge von Überschall- auf Unterschallströmung, bei denen in einem Querschnitt senkrecht zur Strömungsrichtung Druck, Dichte und Temperatur plötzlich auf höhere Werte springen, nennt man senkrechte Verdichtungsstöße. Sie wurden von B. Riemann schon 1860 theoretisch vorausgesagt und können im Experiment durch gewisse optische Anordnungen direkt sichtbar gemacht werden, da mit der Dichte auch der Brechungsexponent des Lichts sich unstetig ändert.

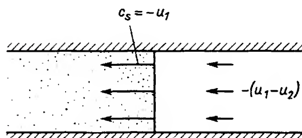


Fig. 57.
Verdichtung eines ruhenden Gases durch einen Verdichtungsstoß

Die bisher betrachtete stationäre Strömung entspräche derjenigen, die ein mit dem Stoß bewegter Beobachter feststellte. Die statischen Zustandsgrößen p, ϱ und T bleiben nun unverändert, wenn der ganzen Strömung eine entgegengesetzt gerichtete Parallelströmung $-u_1$ überlagert wird (vgl. Fig. 57). Dann bewegt sich der Stoß selbst mit der Geschwindigkeit $c_s = -u_1$ nach links, vor ihm ist das Gas in Ruhe, hinter ihm folgt es mit der Geschwindigkeit $-(u_1 - u_2)$. Durch den Stoß wird das vorher ruhende Gas um $\Delta p = p_2 - p_1$ verdichtet; als anschaulicher Parameter für die Stoßstärke eignet sich daher das Verhältnis p_2/p_1. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Stoßes selbst erhält man durch Umschreiben der Gleichung (2.194):

$$\frac{c_s}{c} = Ma_1 = \sqrt{1 + \frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)}. \tag{2.201}$$

Während sehr schwache, akustische Druckstörungen ($\Delta p \approx 0$) sich mit der Schallgeschwindigkeit c ausbreiten ($c_s = c$), laufen hiernach stärkere Stoßwellen – wie z. B. bei Explosionen – mit Überschallgeschwindigkeit; allerdings ist für

die obige Rechnung vorausgesetzt, daß der hohe Druck hinter dem Stoß stationär aufrecht erhalten wird. Das Verhältnis der Dichte nach Durchlaufen des Stoßes zum Wert davor wird nach (2.193) und (2.194)

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{1 + \frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1} \frac{p_2}{p_1}}{\frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1} + \frac{p_2}{p_1}}. \tag{2.202}$$

Diese nach **Rankine** und **Hugoniot** benannte Druck-Dichte-Beziehung weicht für nicht zu starke Stöße kaum von der Isentrope $\varrho_2/\varrho_1 = (p_2/p_1)^{1/\varkappa}$ ab (Fig. 58). Denn der Entropieanstieg in schwachen Stößen ist nach Gl. (2.200) proportional zu $(Ma_1^2 - 1)^3$, also auch zu $(\Delta p/p_1)^3$. Deshalb kann man auch noch Gasströmungen mit Verdichungsstößen als isentrop ansehen, solange die Stöße nicht zu stark sind.

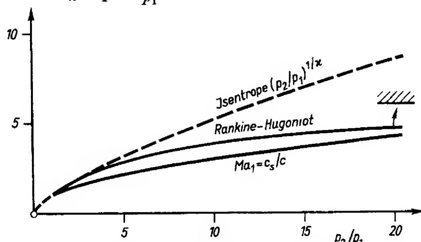


Fig. 58. Rankine-Hugoniot-Beziehung für ϱ_2/ϱ_1 bei $\varkappa = 1{,}4$

Die Zustandsänderungen nach dem Stoß sind in Fig. 59 dargestellt. Zur Veranschaulichung des Entropieanstiegs bei starken Stößen ist das Ruhedruckverhältnis p_{02}/p_{01} mit aufgetragen. Der Ruhedruck p_0 ist der Druck, den ein Gas annähme, das quasistatisch – also verlustlos und isentrop – aus dem momentanen Strömungszustand in den Ruhezustand übergeführt würde. Aus der Isentrope und der Energiegleichung (2.188) ergibt sich leicht allgemein für den Ruhedruck

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\varkappa - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}. \tag{2.203}$$

Die zugehörige Ruhetemperatur T_0 folgt wegen $i = c_p T$ aus dem Energiesatz: $c_p T_0 = c_p T + v^2/2$; somit muß wegen der Energieerhaltung vor und hinter dem Stoß $T_{01} = T_{02}$

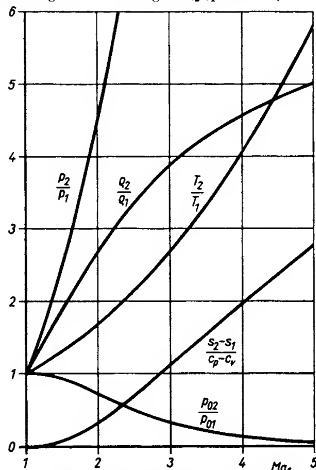


Fig. 59. Zustandsänderungen im senkrechten Verdichtungsstoß ($\varkappa = 1{,}4$)

gelten. Die Ruheentropie ist – gemäß der Definition des Ruhedrucks – zugleich auch die Entropie des betrachteten Zustands. Somit gibt Gleichung (2.171) angewandt auf den Ruhezustand vor und hinter dem Stoß

$$s_2 - s_1 = (c_p - c_v) \ln \frac{p_{01}}{p_{02}} \geqq 0 . \tag{2.204}$$

Wegen des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik sind nur Verdichtungsstöße möglich, nicht aber unstetige Verdünnungen. Zu diesem Schluß führt auch schon eine qualitative Betrachtung einer Druckwelle mit endlicher Amplitude wie in Fig. 60; die Welle gehe nach rechts über ursprünglich ruhende Luft hinweg. Die Luftteilchen werden zunächst – in der Phase zwischen a und b – verdünnt, dann (von b bis d) komprimiert und schließlich wieder auf den Ausgangswert entspannt. Das Druckgefälle bei Entspannung bzw. Verdichtung bewirkt eine Beschleunigung der Teilchen nach links bzw. nach rechts.

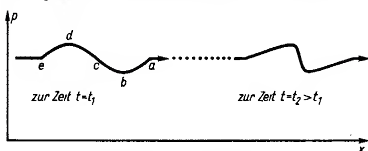


Fig. 60. Veränderung einer Druckwelle

Die Teilchengeschwindigkeit u_T wechselt daher von null auf den Größtwert $-u_T$ bei b und $+u_T$ bei d. Die absolute Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Druckstörung ist in der Phase b also $-u_T + c_b$, bei d jedoch $+u_T + c_d$. Die Schallgeschwindigkeit $c = \sqrt{dp/d\varrho}$ ist nun außerdem bei b wegen des dortigen Unterdrucks etwas kleiner – bei d etwas größer – als die im ungestörten Druckzustand bei a, c und e: $c(\Delta p = 0)$. Somit wird erst recht $-u_T + c_b < +u_T + c_d$ und die Phase bei b wird langsamer fortgepflanzt als die bei d. Die Verdünnungen a bis b und d bis e werden daher räumlich abgeflacht, die Verdichtung zwischen b und d jedoch aufgesteilt bis ein unstetiger Verdichtungsstoß entstanden ist, der mit der oben berechneten Geschwindigkeit c_s durch das ruhende Gas eilt.

Die einfachste Verwirklichung der obigen Rohrströmung ergibt sich in einem Stoßrohr. Im Prinzip ist das ein langes Rohr, das durch eine Membran unterteilt wird; in der einen Kammer (A) wird das Gas möglichst hoch komprimiert, in der anderen (B) evakuiert. Wird die Membran plötzlich entfernt, so setzt ein stürmischer Druckausgleich ein. Man kann auch ein explosibles Gasgemisch komprimieren und entzünden, so daß die Membran dadurch weggesprengt wird. In den Rohrteil B läuft dann ein Verdichtungsstoß, in A eine Verdünnungswelle. Hinter dem Verdichtungsstoß läuft etwas langsamer die Grenze der beiden Gase, die ursprünglich durch die Membran getrennt waren. An dieser Grenze sind Geschwindigkeit und Druck stetig, Dichte und Temperatur dagegen gewöhnlich unstetig. Die so erzeugte Strömung zwischen Verdichtungsstoß und Mediengrenze kann nun als Versuchsstrecke für das Verhalten des Gases bei plötzlicher sehr starker Temperaturerhöhung benutzt werden, bevor der Stoß und die Verdünnungswellen von den Rohrenden reflektiert werden; die Meßzeiten sind freilich nur von der Größenordnung 10^{-3} s.

Die starke Temperaturerhöhung im Verdichtungsstoß führt bei höheren Mach-Zahlen (etwa $Ma > 5$) zu Dissoziation (Zerfall von Gasmolekülen in atomare Bestandteile) oder gar zu Ionisation. Für solche Hyperschallströmungen treffen die obigen thermodynamischen Zustandsgleichungen natürlich nicht mehr zu. Andererseits kann man an solchen Verdichtungsstößen die Reaktionskinetik einfacher chemischer Vorgänge studieren, da sich hier sehr schnelle und starke Temperaturänderungen verwirklichen lassen.

2.3.5. Schiefer Verdichtungsstoß. Eine Erweiterung der eindimensionalen Strömung mit einem Verdichtungsstoß auf eine zweidimensionale, ebene und stationäre Strömung ergibt sich dann, wenn man eine überall gleichgroße Geschwindigkeit v parallel zur Stoßebene überlagert wie in Fig. 61 a. Dadurch wird die Strömung zwar kinematisch verändert, die statischen und thermodynamischen Beziehungen für den Druck, Dichte und Temperatur vor und hinter dem Stoß bleiben jedoch unverändert. Dreht man das Koordinatensystem so, daß die resultierende Anströmung $w_1 = \sqrt{u_1^2 + v^2}$ wieder horizontal ist wie in Fig. 61 b gezeigt, so bildet der Stoß jetzt mit der Anströmrichtung den Winkel $\beta = \arctan u_1/v$.

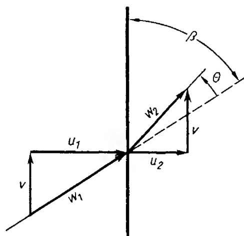


Fig. 61 a.
Schiefer Verdichtungsstoß, zusammengesetzt aus einem senkrechten Stoß (von u_1 auf u_2) und einer dazu parallelen Strömung (v)

Im Stoß wird die dazu senkrechte Geschwindigkeitskomponente u verringert ($u_2 < u_1$), wodurch die Stromlinien dort um den Winkel Θ zum Stoß hin abgelenkt werden. Der Knickwinkel Θ ist durch $\tan(\beta - \Theta) = u_2/v$ bestimmt. Die Mach-Zahl der Anströmung ist jetzt $Ma_1 = w_1/c_1 = u_1/(c_1 \sin\beta)$, während Ma_1 im Formelsystem des Abschnitts 2.3.4 u_1/c_1 bedeutete. Diese Formeln lassen sich nun auf schiefe Stöße mit $\beta \neq 90°$ dadurch verallgemeinern, daß statt Ma_1 überall $Ma_1 \cdot \sin\beta$ geschrieben wird, da $\sin\beta = u_1/w_1$. Insbesondere wird aus Gl. (2.193)

$$\frac{\tan(\beta - \Theta)}{\tan\beta} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{(\varkappa - 1)\, Ma_1^2 \sin^2\beta + 2}{(\varkappa + 1)\, Ma_1^2 \sin^2\beta}, \tag{2.205}$$

woraus nach einiger Rechnung folgt

$$\tan\Theta = \frac{2}{\tan\beta} \cdot \frac{Ma_1^2 \sin^2\beta - 1}{(\varkappa + \cos 2\beta)\, Ma_1^2 + 2}. \tag{2.206}$$

Für die Mach-Zahl hinter dem Stoß gibt die verallgemeinerte Gleichung (2.197)

$$Ma_2^2 \sin^2(\beta - \Theta) = \frac{(\varkappa - 1)\, Ma_1^2 \sin^2\beta + 2}{2\varkappa\, Ma_1^2 \sin^2\beta - (\varkappa - 1)}. \tag{2.207}$$

Diese Gleichungen sind in Fig. 61 b graphisch dargestellt. Da im Verdichtungsstoß nur die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Stoß unstetig verkleinert wird, kann hinter einem schiefen Stoß durchaus noch immer Überschall ($Ma_2 > 1$) herrschen.

Denkt man sich eine Stromlinie wie in Fig. 62 a durch eine feste Wand ersetzt, so sieht man, daß das plötzliche Abknicken der Stromlinien einer ebenen Parallelströmung mit Überschallgeschwindigkeit verwirklicht werden kann als Strömung in einer stumpfen Ecke, von der ein schiefer Stoß ausgeht. Vor-

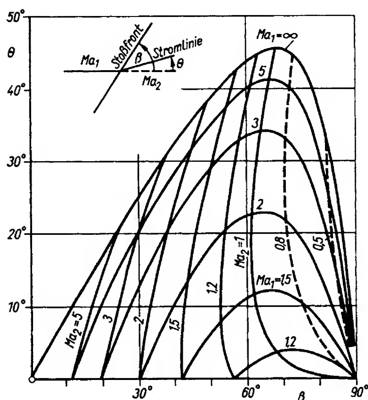
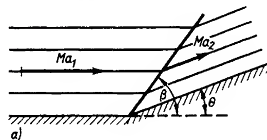


Fig. 61b. Schiefer Verdichtungsstoß (Stoßfrontwinkel β, Knickwinkel der Stromlinien θ, Ma_1 und Ma_2 Mach-Zahlen vor und hinter dem Stoß

gegeben sei etwa die Mach-Zahl der Anströmung Ma_1 und der Umlenkwinkel Θ. Für kleine Winkel Θ sind dann nach Fig. 61b zwei verschiedene Stöße möglich: ein schiefer Stoß, hinter dem noch immer Überschall herrscht[1]), oder ein fast senkrechter Stoß mit starker Verdichtung auf Unterschall. Im Versuch wird der erste, schwache Stoß gefunden, – so wie auch sonst in einer Parallelströmung ein senkrechter Stoß nicht ohne besonderen Anlaß auftritt, obwohl er an jedem Ort möglich wäre. Mit der Strömung in einer Ecke ist auch die Überschallströmung an einem spitzen, ebenen Keil bekannt, denn die Stromlinie, die zur Keilspitze führt, braucht ja nicht mit einer Wand zusammenzufallen. Da schließlich diese Stromlinie in Überschallströmung unabhängig ist von der Strömung hinter der Keilspitze, kann man auch die unsymmetrische Keilströmung wie in Fig. 62b mit Hilfe der Fig. 61 so konstruieren.



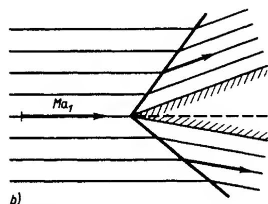


Fig. 62. a) und b)
Einfache Überschallströmungen mit schiefen Stößen ($\theta < \theta_{max}$)

Aus Fig. 61b ist jedoch zu ersehen, daß eine Parallelströmung Ma_1 durch einen einzelnen schiefen Stoß höchstens um einen Winkel $\Theta_{max}(Ma_1)$ abgelenkt werden kann. Ist der halbe Keilwinkel nun größer als Θ_{max}, so existiert keine so einfache Lösung wie in den Beispielen der Fig. 62. Vor solchen Keilen – und allgemein vor allen Körpern mit stumpfem Kopf – beobachtet man einen vom Körper abgelösten Stoß mit gekrümmter Front, wie z. B. in Fig. 63. In der Umgebung der Stromlinie, die zum Staupunkt führt, ist dieser Stoß senkrecht zur Anströmung, und die Geschwindigkeit fällt dort auf

(1 Abgesehen von einem kleinen Bereich um Θ_{max}, da nach Fig. 61b die Linie $Ma_2 = 1$ die Kurven $Ma_1 = \text{const}$ nicht genau im Maximum schneiden.

Unterschall ab. Vor dem Kopf bildet sich daher ein Unterschallgebiet aus, in dem sich Störungen stromaufwärts bemerkbar machen. Solche Strömungen, in denen gleichzeitig Über- und Unterschallgebiete vorhanden sind, lassen sich theoretisch nicht so einfach übersehen wie die obigen reinen Überschallströmungen.

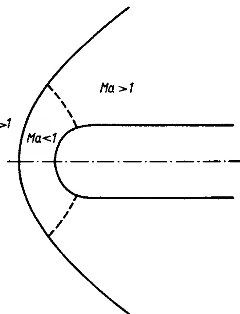


Fig. 63. Abgelöster Verdichtungsstoß vor einem Körper mit stumpfem Kopf

2.3.6. Croccos Wirbelsatz; Potential. Für die stationäre Strömung eines reibungslosen, nicht-wärmeleitenden Gases, auf das keine äußeren Kräfte wirken, lauten die Erhaltungssätze für Impuls und Energie der Masseteilchen

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \operatorname{grad} \frac{\boldsymbol{v}^2}{2} - \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p \tag{1.43}$$

$$\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + i = i_0 . \tag{2.183}$$

Nach 2.3.1 existiert, auch für beliebige Medien, die Entropie s (je Masseneinheit), die definiert wird durch

$$T\,ds = di - \frac{dp}{\varrho} . \tag{2.169}$$

Diese Gleichung gilt ganz allgemein, nicht nur für die jeweiligen Zustandsänderungen eines Gasteilchens längs seiner Bahnlinie; deshalb kann man für ein stetiges Strömungsfeld auch verallgemeinert schreiben

$$T \operatorname{grad} s = \operatorname{grad} i - \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p . \tag{2.208}$$

Eliminiert man hiermit in der Euler-Gleichung den statischen Druck, so ergibt sich – mit der Energiegleichung – für stationäre Strömungen:

$$\boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \operatorname{grad} i_0 - T \operatorname{grad} s . \tag{2.209}$$

Abgesehen von gewissen meteorologischen Problemen über geschichtete Luftmassen verschiedener Temperatur (und damit verschiedener Ruheenthalpie i_0), kann man meistens grad $i_0 = 0$ setzen. Entsteht z. B. eine Bewegung im homogenen Medium aus der Ruhe, oder wird ein Körper gleichförmig angeströmt, so ist i_0 zunächst, bzw. weit vor dem Körper, überall gleich. Da die Energie längs jeder Stromlinie unverändert bleibt, ist dann aber i_0 auch später, bzw. neben und hinter dem Körper, überall gleich groß mit Ausnahme von solchen Stellen, in denen sich das Gas nicht im Gleichgewichtszustand befindet. Diese Strömungen nennt man isoenergetisch.

Ist nun eine isoenergetische, stationäre Strömung auch noch isentrop, so ist sie nach der Gleichung (2.209) von L. Crocco (1937) entweder drehungsfrei, oder die Wirbellinien fallen überall mit den Stromlinien zusammen, so daß überall $\boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$ gilt. Abgesehen vom letzteren Sonderfall, – der übrigens

in ebener oder drehsymmetrischer Strömung nicht möglich ist, da hier Wirbellinien nur senkrecht zu den Stromlinien denkbar sind –, existiert daher in isentroper, isoenergetischer, stationärer Strömung ein Geschwindigkeitspotential Φ mit $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \Phi$ und $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$. Andererseits kann in isoenergetischer, stationärer Strömung dort, wo die Entropie sich örtlich ändert, kein Potential existieren.

In einem senkrechten oder schiefen Verdichtungsstoß mit gerader Stoßfront springt die Entropie überall um den gleichen Betrag; bei gleichförmiger Anströmung ist daher die Strömung auch hinter dem Stoß wieder isentrop und drehungsfrei. Hinter einem gekrümmten Stoß (wie etwa in Fig. 63) ist der Entropiezuwachs jedoch von Stromlinie zu Stromlinie verschieden, und die Strömung bleibt nicht mehr drehungsfrei. Da andererseits der Entropieanstieg im Stoß überhaupt erst bei starker Verdichtung ins Gewicht fällt, spielt der Croccosche Wirbelsatz erst bei gekrümmten Stößen in Hyperschallströmungen eine auch praktisch wichtige Rolle. Für die sonstigen Unter- und Überschallströmungen gibt jedoch die Potentialströmung eine gute Näherung für die Strömung wirklicher Gase, selbst dort, wo Stöße auftreten, ausgenommen natürlich die Grenzschichtströmung an den Körperwänden sowie Strömungen mit Wärmeleitung oder gar chemischen Reaktionen.

2.3.7. Gasdynamische Gleichung. Für die stationäre Potentialströmung eines idealen Gases gilt nun:

Drehungsfreiheit	$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$, also $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \Phi$,
Isentrope	$p\varrho^{-\varkappa} = \text{const}$, und $c^2 = \dfrac{dp}{d\varrho}$,
Kontinuität	$\operatorname{div} \varrho \boldsymbol{v} = \varrho \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \operatorname{grad} \varrho = 0$,
Euler-Gleichung	$\operatorname{grad} \dfrac{\boldsymbol{v}^2}{2} = -\dfrac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p = -\dfrac{1}{\varrho}\dfrac{dp}{d\varrho} \operatorname{grad} \varrho = -\dfrac{c^2}{\varrho} \operatorname{grad} \varrho$.

Eliminiert man aus den beiden letzten Gleichungen die Dichte, so erhält man die sogenannte gasdynamische Gleichung für das Geschwindigkeitsfeld:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{v}}{c^2} \cdot \operatorname{grad} \frac{\boldsymbol{v}^2}{2} = 0\,. \tag{2.210}$$

Mit $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \Phi$ lautet diese Gleichung ausgeschrieben:

$$\Phi_{xx}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) + \Phi_{yy}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \Phi_{zz}\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right) - \\ - \frac{2uv}{c^2}\Phi_{xy} - \frac{2vw}{c^2}\Phi_{yz} - \frac{2uw}{c^2}\Phi_{xz} = 0\,, \tag{2.211}$$

wobei für die örtliche Schallgeschwindigkeit gilt (vgl. S. 120):

$$c^2 = c_0^2 - \frac{\varkappa - 1}{2}\boldsymbol{v}^2\,.$$

Diese Gleichung für Φ oder für $\boldsymbol{v}$ ist mathematisch offenbar schwierig zu behandeln, da sie nichtlinear ist im Gegensatz zur Potentialgleichung der

inkompressiblen Flüssigkeiten: $\Delta\Phi = 0$, die sich hier nur im Grenzfall für $Ma = |\boldsymbol{v}|/c \to 0$ ergibt.

Einige mathematische Eigenschaften dieser Gleichung seien im folgenden für ebene Strömungen erläutert, für die gilt:

$$A u_x + B u_y + B v_x + C v_y = 0, \quad \text{mit } A = 1 - \frac{u^2}{c^2}, \; B = -\frac{uv}{c^2}, \; C = 1 - \frac{v^2}{c^2}. \tag{2.212}$$

Die Gleichung stellt eine Beziehung zwischen den Geschwindigkeitskomponenten und deren ersten Ableitungen dar, die in jedem Feldpunkt erfüllt sein soll. Es seien nun auf einem Kurvenstück $y(x)$ in der Strömungsebene u und v bekannt; dann kann man deren Änderung $\mathrm{d}u$ und $\mathrm{d}v$ längs dieser Kurve durch Differenzieren finden. Mit Hilfe einer Taylor-Reihe kann man aber auch in benachbarten Punkten neben der Ausgangskurve u und v berechnen, wenn die Änderung von u und v quer zur Kurve bekannt sind, d. h. aber, wenn man alle Gradienten u_x, u_y, v_x und v_y (sowie die höheren Ableitungen) ermitteln kann. Hierfür hat man aber gerade vier Bestimmungsgleichungen, nämlich

$$\begin{array}{llll} u_x \mathrm{d}x + u_y \mathrm{d}y & & = \mathrm{d}u & \text{längs der Ausgangskurve} \\ & v_x \mathrm{d}x + v_y \mathrm{d}y & = \mathrm{d}v & \text{,, \quad ,, \quad ,,} \\ -\; u_y + & v_x & = 0 & \text{Drehungsfreiheit} \\ A u_x + B u_y + B v_x & + C v_y & = 0 & \text{gasdynamische Gleichung.} \end{array}$$

Dieses lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, solange seine Determinante D nicht verschwindet, d. h. solange

$$D = \begin{vmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{d}x & \mathrm{d}y \\ 0 & -1 & +1 & 0 \\ A & B & B & C \end{vmatrix} = A\,(\mathrm{d}y)^2 - 2B\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + C\,(\mathrm{d}x)^2 \neq 0\,. \tag{2.213}$$

[Auch die entsprechenden Gleichungen zur Berechnung höherer Ableitungen (u_{xx}, u_{yx}, usw.) haben die gleiche Determinante.] D verschwindet jedoch dann, wenn das Kurvenstück $y(x)$ die folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = \frac{1}{A}\left(B \pm \sqrt{B^2 - AC}\right) = \frac{1}{c^2 - u^2}\left(-\,uv \pm c^2\sqrt{Ma^2 - 1}\right). \tag{2.214}$$

Die hierdurch definierten Integralkurven nennt man Charakteristiken der Gleichung (2.211).

Für den Fall $B^2 < AC$, d. h. hier in Unterschallströmung mit $Ma < 1$, existieren offenbar keine reellen Charakteristiken. Demzufolge kann die Determinante nirgends verschwinden. Man spricht dann von einer elliptischen Differentialgleichung (für $\boldsymbol{v}$ oder Φ). Hier ist es prinzipiell stets möglich, nach dem oben skizzierten Verfahren die Geschwindigkeitsgradienten nach allen Richtungen zu bestimmen und eine örtlich gegebene Lösung fortzusetzen. Insbesondere kann man etwa aus gegebenen Randwerten von $\boldsymbol{v}$ oder Φ das ganze Strömungsfeld sukzessive berechnen.

Ist dagegen $B^2 > AC$, wie in einem Gebiet mit Überschallströmung $Ma > 1$, so existieren in jedem Feldpunkt zwei reelle Charakteristiken, auf denen die Determinante D verschwindet. In diesem hyperbolischen Fall versagt die obige schrittweise Integration dort, wo die Ausgangskurve (mit den bekannten u- und v-Werten) gerade die Richtung y' einer der beiden Charakteristiken hat; denn dann sind dort die Gradienten quer zu dieser Richtung nicht bestimmbar und können beliebige Werte annehmen. Sind z. B. in Fig. 64 u und v auf dem nicht charakteristischen Kurvenstück AB gegeben, so ist dadurch die Lösung nur im Charakteristikenviereck AC_2BC_1 bestimmt; C_1 und C_2 sind dabei die Schnittpunkte der beiden Charakteristikenpaare durch A und B. Jenseits dieses Vierecks setzen sich zwar die Geschwindigkeitskomponenten u und v stetig fort, deren Ableitungen jedoch nicht unbedingt. So können z. B. die Stromlinien am Ort einer Charakteristik einen Krümmungssprung erfahren. Änderungen der Richtung oder des Betrags der Geschwindigkeit treten dagegen erst hinter Stößen auf mit endlichem, wenn auch eventuell nur kleinem Entropieanstieg.

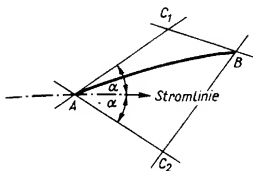


Fig. 64.
Charakteristiken-Viereck als Einflußgebiet der Werte auf dem Kurvenstück AB

Aus der Gleichung (2.214) folgt für den Winkel γ_{Ch}, den die Charakteristik mit der positiven x-Achse bildet: $\tan \gamma_{Ch} = y'$. Da die x-Richtung willkürlich gewählt sein kann, erhält man eine sinnvollere Aussage für den Winkel $(\gamma_{Ch} - \gamma_{Str})$ zwischen der Charakteristik und der örtlichen Stromlinie, deren Neigung gegen die x-Achse ist: $\tan \gamma_{Str} = v/u$. Es wird nämlich:

$$\tan(\gamma_{Ch} - \gamma_{Str}) = \frac{y' - v/u}{1 + y' v/u} = \pm \frac{1}{\sqrt{Ma^2 - 1}}, \text{ d. h.}$$

$$\gamma_{Ch} - \gamma_{Str} = \pm \alpha, \quad \text{mit} \quad \sin\alpha = \frac{1}{Ma}. \tag{2.215}$$

Die Charakteristiken sind also identisch mit den Machschen Linien. Die zu ihnen senkrechte Geschwindigkeitskomponente $|\boldsymbol{v}| \sin\alpha$ ist gerade gleich der örtlichen Schallgeschwindigkeit; eine kleine Störung kann sich daher nur stromabwärts zwischen den vom Störungspunkt ausgehenden Charakteristiken auswirken, auf denen sich die infinitesimale Störung unverändert fortpflanzt.

2.3.8. Prandtl-Meyersche Eckenumströmung. Im Abschnitt 2.3.5 ist gezeigt worden, wie eine Überschallparallelströmung längs einer Wand mit einer einspringenden Ecke durch einen Stoß umgelenkt und verdichtet wird. Umgekehrt kann eine Überschallparallelströmung hinter einem konvexen Wandknick nach außen expandieren. Ist der Knickwinkel sehr klein, so pflanzt sich die vom Knick verursachte kleine Störung längs einer geraden Mach-Linie von der Ecke aus in die Anströmung mit $Ma_1 > 1$ unter dem Winkel $\alpha = \arcsin 1/Ma_1$ fort. Dahinter sind Dichte und Druck etwas verringert, und folglich ist die Geschwindigkeit senkrecht zur Mach-Linie vergrößert; es ergibt sich so – je nach dem Wandknick – eine kleine Umlenkung der Stromlinien und eine Erhöhung

der Mach-Zahl um ΔMa. Folgt jetzt ein zweiter kleiner Knick der Wand nach außen, so geht auch von diesem wieder eine Mach-Linie aus unter dem etwas kleineren Winkel $\arcsin 1/(Ma_1 + \Delta Ma)$ wie in Fig. 65. Man kann sich nun einen konvexen Wandknick mit endlich großem Winkel in eine Folge sehr vieler kleiner Knicke aufgelöst denken, da sich bei dieser Expansion die Mach-Linien nicht kreuzen und stören. In einer einspringenden Ecke würden sich die entsprechenden Mach-Linien überschneiden, was zu physikalisch unmöglichen, teilweise rückläufigen Stromlinien führte. Statt dessen entsteht dort – wie schon in 2.3.5 gezeigt – ein unstetiger Verdichtungsstoß mit Entropieanstieg, während bei der jetzt betrachteten Verdünnung die Strömung streng isentrop verläuft, so daß hier ein Geschwindigkeitspotential existiert.

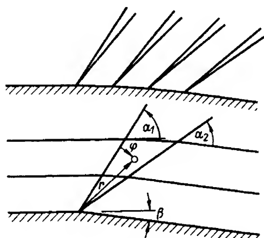


Fig. 65. Überschallströmung um eine Ecke

Das Polygon, das nun den Wandknick ersetzen soll, kann schließlich beliebig klein gedacht werden, da ja in der obigen Überlegung keine Länge ausgezeichnet ist; dann pflanzen sich alle Mach-Linien fächerförmig von der Ecke aus fort, wie in Fig. 65 unten. Die erste Linie ist durch die Mach-Zahl der Anströmung bestimmt, die letzte durch die – bei gegebenem Knickwinkel β der Wand – zunächst noch unbekannte Mach-Zahl $Ma_2 > Ma_1$ der Abströmung parallel zum zweiten Wandteil.

Zur Berechnung der Strömung im Verdünnungsfächer zwischen diesen beiden Mach-Linien ist es offenbar zweckmäßig, Polarkoordinaten r und φ mit den zugehörigen Geschwindigkeitskomponenten v_r und v_φ einzuführen. Da keine ausgezeichnete Länge existiert, die als Maßstab dienen könnte, ist diese Strömung ähnlich bezüglich des Eckenabstands, d. h. Geschwindigkeit, Dichte und Druck können nicht von r abhängen. Für das Potential Φ folgt daraus:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = v_r(\varphi), \quad \frac{\partial \Phi}{r \partial \varphi} = v_\varphi(\varphi) \tag{2.216}$$

also

$$\Phi = r F(\varphi), \quad \text{mit} \quad F(\varphi) = v_r \quad \text{und} \quad F'(\varphi) = v_\varphi. \tag{2.217}$$

Im Verdünnungsfächer ist nun jeder Fahrstrahl durch die Ecke ($\varphi = \text{const}$) eine Mach-Linie oder Charakteristik, auf der gilt

$$v_\varphi = c\,. \tag{2.218}$$

Dies folgt natürlich auch aus der gasdynamischen Gleichung (2.211), wenn man sie auf Polarkoordinaten transformiert und auf den vorliegenden Fall anwendet. (Die andere Familie von Charakteristiken, die mit den Stromlinien jeweils den Winkel $-\arcsin 1/Ma$ bilden, interessiert hier nicht besonders).

Die Bernoulli-Gleichung gibt nach (2.188) schließlich für die Schallgeschwindigkeit c

$$c^2 = c_0^2 - \frac{\varkappa - 1}{2}\left(v_r^2 + v_\varphi^2\right) = v_\varphi^2 \tag{2.219}$$

und somit für $F(\varphi)$

$$F'^2 + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} F^2 = \frac{2}{\varkappa + 1} c_0^2\,. \tag{2.220}$$

Die Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung ist

$$F = v_r = c_0 \sqrt{\frac{2}{\varkappa - 1}} \sin\left(\varphi \sqrt{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}} + \varphi_0\right) \tag{2.221}$$

$$F' = v_\varphi = c_0 \sqrt{\frac{2}{\varkappa + 1}} \cos\left(\varphi \sqrt{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}} + \varphi_0\right). \tag{2.222}$$

Zählt man φ von der ersten Mach-Linie an, so wird auf dieser $\varphi = 0$, $v_r = U_1 \cos\alpha_1$ und $v_\varphi = U_1 \sin\alpha_1$, woraus für die Integrationskonstante φ_0 folgt:

$$\tan\varphi_0 = \sqrt{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}} \cot\alpha_1 = \sqrt{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}} \sqrt{Ma_1^2 - 1}. \tag{2.223}$$

Auf der letzten Mach-Linie gilt

$$\varphi_2 = \beta + \alpha_1 - \alpha_2 \tag{2.224}$$

$$v_r = U_2 \cos\alpha_2 = c_0 \sqrt{\frac{2}{\varkappa - 1}} \sin\left(\varphi_2 \sqrt{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}} + \varphi_0\right) \tag{2.225}$$

$$v_\varphi = U_2 \sin\alpha_2 = c_0 \sqrt{\frac{2}{\varkappa + 1}} \cos\left(\varphi_2 \sqrt{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}} + \varphi_0\right). \tag{2.226}$$

Aus diesen drei Gleichungen können φ_2, U_2 und α_2 berechnet werden. Mit den Ruhegrößen c_0, ϱ_0 und p_0 folgt der Druck aus der Isentrope

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^\varkappa \text{ und aus } c^2 = \frac{\varkappa p}{\varrho}$$

$$\frac{c^2}{c_0^2} = \frac{p/p_0}{\varrho/\varrho_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1 - 1/\varkappa} = \frac{v_\varphi^2}{c_0^2} = \frac{2}{\varkappa + 1} \cos^2\left(\varphi \sqrt{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}} + \varphi_0\right) \tag{2.227}$$

für $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$.

Hieraus und aus der Bernoulli-Gleichung folgt für die An- und Abströmung

$$\frac{v^2}{c^2} = Ma^2 = \frac{2}{\varkappa - 1}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-(\varkappa - 1)/\varkappa} - 1\right]. \tag{2.228}$$

Der größte Verdünnungsfächer φ_2 entsteht bei der Expansion ins Vakuum $p_2 = 0$, wenn

$$\varphi_2 \sqrt{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}} + \varphi_0 = \frac{\pi}{2}. \tag{2.229}$$

Nach (2.226) und 2.225) wird dann

$$\alpha_2 = 0 \quad \text{und} \quad U_2 = c_0 \sqrt{\frac{2}{\varkappa - 1}} = U_{\max}.$$

Wegen $\alpha_2 = 0$ ist der Strahl $\varphi = \varphi_2$ jetzt sowohl Mach-Linie wie Stromlinie. Ferner wird

$$\beta = \varphi_2 - \alpha_1 + \alpha_2 = \sqrt{\frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1}} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{\tan\alpha_1} \sqrt{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}}\right)\right] - \alpha_1. \tag{2.230}$$

Der größte Winkel β_{max}, um den die Strömung überhaupt so umgelenkt werden kann, ergibt sich daraus für $\alpha_1 = \pi/2$, also bei einer Anströmung mit $Ma_1 = 1$; dann wird $\beta_{max} = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}} - 1\right) = 130{,}5°$ für $\varkappa = 1{,}4$. Auch wenn der Wandwinkel größer als dieser Wert wird, kann die Strömung nicht weiter umgelenkt werden; sie löst sich an der Ecke von der Wand ab, und es entsteht ein Vakuum-Totwasser zwischen der letzten Stromlinie $\varphi = \varphi_2$ und der abgeknickten Wand.

Die Stromlinien ergeben sich übrigens aus $dr : r\,d\varphi = v_r : v_\varphi$ zu

$$\frac{r}{r(\varphi = 0)} = \left[\frac{\cos\varphi_0}{\cos\left(\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}\,\varphi + \varphi_0\right)}\right]^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}. \tag{2.231}$$

2.3.9. Die linearisierte, gasdynamische Gleichung. Die gasdynamische Gleichung (2.211) lautet – speziell für ebene, stationäre Potentialströmungen –

$$\Phi_{xx}(c^2 - u^2) + \Phi_{yy}(c^2 - v^2) = 2uv\,\Phi_{xy}. \tag{2.232}$$

Sie läßt sich für einen wichtigen Sonderfall näherungsweise linearisieren, wenn nämlich eine Parallelströmung U nur wenig gestört wird, etwa durch einen schlanken Körper. Es wird dann

$$u = U + u_s,\; v = v_s \text{ und } \Phi = Ux + \varphi\,, \tag{2.233}$$

wo φ das Potential für die Störgeschwindigkeiten $u_s = \varphi_x$, $v_s = \varphi_y$ bedeutet. Offenbar ist es hier zweckmäßig, statt der Schallgeschwindigkeit des Ruhezustands c_0 diejenige der ungestörten Parallelströmung c_∞ einzuführen, für die aus der Bernoulli-Gleichung (2.188)

$$\frac{(U+u_s)^2 + v_s^2}{2} + \frac{c^2}{\varkappa-1} = \frac{U^2}{2} + \frac{c_\infty^2}{\varkappa-1} \tag{2.234}$$

folgt

$$c^2 = c_\infty^2 - \frac{\varkappa-1}{2}\left(2Uu_s + u_s^2 + v_s^2\right). \tag{2.235}$$

Damit kann man die ursprüngliche Gleichung für Φ in eine für φ umschreiben:

$$\varphi_{xx}(1 - Ma_\infty^2) + \varphi_{yy} = Ma_\infty^2\left\{\varphi_{xx}\left[(\varkappa+1)\frac{u_s}{U} + \frac{\varkappa+1}{2}\frac{u_s^2}{U^2} + \frac{\varkappa-1}{2}\frac{v_s^2}{U^2}\right] + \right.$$
$$+ \varphi_{yy}\left[(\varkappa-1)\frac{u_s}{U} + \frac{\varkappa-1}{2}\frac{u_s^2}{U^2} + \frac{\varkappa+1}{2}\frac{v_s^2}{U^2}\right] +$$
$$\left. + 2\varphi_{xy}\left[\frac{v_s}{U} + \frac{u_s v_s}{U^2}\right]\right\}, \tag{2.236}$$

mit $Ma_\infty = U/c_\infty$.

Setzt man nun voraus, daß die Störung der Parallelströmung klein ist:

$$u_s, v_s \ll U\,,$$

so kann man die rechte Seite der Gleichung (2.236) vernachlässigen und erhält eine wesentlich einfachere, lineare Gleichung für φ. Dazu sind allerdings auszuschließen: die Umgebungen von Staupunkten (mit $u_s^2 + v_s^2 = U^2$), sowie Hyperschallströmungen mit $Ma_\infty \gg 1$. Besonders zu beachten ist ferner (vgl. Abschn. 2.3.7), daß die Differentialgleichung

$$A\,\varphi_{xx} + 2\,B\,\varphi_{xy} + C\,\varphi_{yy} = 0 \qquad (2.237)$$

ihren Typus wechselt, je nachdem ob

$AC - B^2 > 0$ (elliptischer Typus)

oder $AC - B^2 < 0$ (hyperbolischer Typus).

Nun wird hier

$$A = 1 - Ma_\infty^2 - Ma_\infty^2(\varkappa + 1)\frac{u_s}{U}\ldots$$

$$B = \qquad - M_\infty^2\frac{v_s}{U}\ldots$$

$$C = 1 \qquad - Ma_\infty^2(\varkappa - 1)\frac{u_s}{U}\ldots$$

In schallnaher Strömung mit $Ma_\infty \approx 1$ bestimmt daher die Störgeschwindigkeit u_s das Vorzeichen von A und damit den Typ der Gleichung. Hierfür ist daher – auch bei beliebig kleiner Störung – bestenfalls nur folgende Vereinfachung zulässig:

$$\varphi_{xx}(1 - Ma_\infty^2) + \varphi_{yy} = (\varkappa + 1)\,Ma_\infty^2\,\varphi_{xx}\frac{\varphi_x}{U}\,. \qquad (2.238)$$

Für reine Unter- oder Überschallströmungen mit $Ma \not\approx 1$ und $u_s \ll U$ genügt jedoch die lineare Gleichung

$$\varphi_{xx}(1 - Ma_\infty^2) + \varphi_{yy} = 0\,, \qquad (2.239)$$

die elliptisch ist für $Ma_\infty < 1$ und hyperbolisch für $Ma_\infty > 1$.

Für das Druckfeld folgt mit $c^2 = \varkappa p/\varrho$ und $p/p_\infty = (\varrho/\varrho_\infty)^\varkappa$ aus Gleichung (2.235) für u_s, $v_s \ll U$ in erster Näherung:

$$c^2 - c_\infty^2 = \varkappa\left(\frac{p}{\varrho} - \frac{p_\infty}{\varrho_\infty}\right) = \frac{\varkappa\,p_\infty}{\varrho_\infty}\left[\left(\frac{p}{p_\infty}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1\right] \approx -(\varkappa - 1)\,U\,u_s\,, \qquad (2.240)$$

oder
$$\frac{p}{p_\infty} \approx \left[1 - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\,\frac{\varrho_\infty\,U\,u_s}{p_\infty}\right]^{\varkappa/(\varkappa-1)} \approx 1 - \frac{\varrho_\infty U u_s}{p_\infty}\,. \qquad (2.241)$$

Der Druckbeiwert c_p wird somit einfach

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\varrho_\infty U^2/2} \approx -\frac{2\,u_s}{U}\,. \qquad (2.242)$$

2.3.10. Strömung längs einer welligen Wand. Das einfachste Anwendungsbeispiel für die linearisierte gasdynamische Gleichung ist die Strömung längs einer Wand, die nicht genau eben, sondern schwach gewellt ist. Ihre Form sei definiert durch $y_0 = \varepsilon \sin \alpha x$, mit $l = 2\pi/\alpha$ = Wellenlänge, und die Amplitude sei klein

gegen die Wellenlänge: $\varepsilon \ll l$. Es genügt dann, die Randbedingung statt an der Wand selbst auf der Abszissenachse $y = 0$ zu befriedigen

$$y = 0: \quad \frac{v_s}{U + u_s} \approx \frac{v_s}{U} = \frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x} = \varepsilon\,\alpha \cos \alpha\, x, \tag{2.243}$$

und sonst für $y > 0$: $u_s, v_s \ll U$.

Es sei zunächst $Ma_\infty < 1$, so daß

$$\beta^2 \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0\,, \quad \text{mit} \quad \beta^2 = 1 - Ma_\infty^2 > 0\,. \tag{2.244}$$

Für diese Unterschallströmung, die diejenige einer inkompressiblen Flüssigkeit als Grenzfall $Ma_\infty \to 0$ mitenthält, wird man eine Lösung für φ erwarten, die periodisch in x ist und für große Wandentfernung $y \to \infty$ nach null abklingt. Man erhält sie durch einen Separationsansatz:

$$\varphi = F(x)\, G(y), \tag{2.245}$$

der zu folgenden beiden Gleichungen führt

$$\frac{F''}{F} = -\frac{1}{\beta^2}\frac{G''}{G} = \text{const} = -k^2\,. \tag{2.246}$$

Das Vorzeichen der noch willkürlichen Konstante ist dabei negativ angenommen, damit $F(x)$ und φ periodisch in x ausfällt; es wird dann

$$F = A_1 \sin kx + A_2 \cos kx$$

$$G = B_1 \mathrm{e}^{-\beta k y} + B_2 \mathrm{e}^{+\beta k y}\,.$$

Damit für $y \to \infty$ G bzw. φ nicht beliebig anwächst, muß $B_2 = 0$ gesetzt werden. Ferner soll an der Wand

$$v_s = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y \approx 0} = F(x)\, G'(y = 0) = U\,\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x} = U\,\varepsilon\,\alpha \cos \alpha\, x$$

gelten. Daraus folgt

$$k = \alpha\,, \quad A_1 = 0$$

sowie $\quad -A_2 B_1 \beta = \varepsilon U$

Es wird also

$$\varphi = -\frac{U\varepsilon}{\beta}\,\mathrm{e}^{-\alpha\beta y} \cos \alpha x \tag{2.247}$$

und

$$u_s = \frac{U\varepsilon\alpha}{\beta}\,\mathrm{e}^{-\alpha\beta y} \sin \alpha\, x \tag{2.248}$$

$$v_s = U\varepsilon\alpha\, \mathrm{e}^{-\alpha\beta y} \cos \alpha\, x,$$

mit $\beta = \sqrt{1 - Ma^2}\,.$ (2.249)

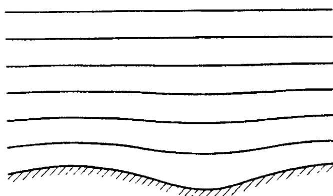


Fig. 66.
Stromlinien längs einer welligen Wand: $Ma_\infty \ll 1$

Die Störung der Parallelströmung U klingt hier exponentiell mit dem Wandabstand ab (Fig. 66), und zwar um so langsamer, je kleiner β ist, d. h. je mehr sich die Anströmgeschwindigkeit U der Schallgeschwindigkeit nähert.

Ist andererseits die Anströmung so schnell, daß überall Überschallgeschwindigkeit herrscht, so lautet die Gleichung (2.244)

$$-\beta_*^2 \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad \text{mit} \quad \beta_*^2 = Ma_\infty^2 - 1 > 0. \tag{2.250}$$

Setzt man auch hier versuchsweise den obigen Separationsansatz $\varphi = F(x)G(y)$ wieder ein, so erhält man eine in x und y periodische Lösung, da F''/F und G''/G jetzt gleiches Vorzeichen haben müssen. Mit der Randbedingung an der Wand wird

$$\varphi = \frac{U\varepsilon}{\beta_*} \cos\alpha x\,[C\cos\alpha\beta_* y + \sin\alpha\beta_* y];\ C = \text{const.} \tag{2.251}$$

Diese Lösung stellt eine der zellularen Wellen dar, die im Buch von V. Bjerknes und anderen[1]) ausführlich behandelt wurden. Die Periodizität in y-Richtung ist jedoch im vorliegenden Fall unerwartet und wird auch im zugehörigen Versuch nicht beobachtet. Wird nämlich eine von links kommende Überschall-Parallelströmung mit $U > c$ (vgl. Fig. 67) einseitig durch eine wellige Wand gestört, so kann die Wandstörung an der Stelle x_W sich nicht stromaufwärts nach links fortpflanzen, sondern nur nach rechts längs der Mach-Linie $(x - x_W) - \beta_* y = 0$. Dies kann man hier als zusätzliche Randbedingung auffassen.

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung (2.250) lautet nun:

$$\varphi = f(x - \beta_* y) + g(x + \beta_* y), \tag{2.252}$$

wobei f und g willkürliche (zweimal differenzierbare) Funktionen sind; denn hierfür wird $\varphi_{xx} = f'' + g''$ und $\varphi_{yy} = \beta_*^2 (f'' + g'')$. Offensichtlich gibt dabei f die Störungen, die sich längs der Mach-Linie oder Charakteristik $x - \beta_* y = \text{const} = x_W$ von der Wand her in den Strömungsraum fortpflanzen. Störungen längs der anderen Charakteristikenschar mit $x + \beta_* y = \text{const}$ wären durch die Funktion g darzustellen; da hier voraussetzungsgemäß keine Störungen längs dieser Mach-Linien von links oben auf die wellige Wand einfallen, ist $g = 0$ zu setzen. Mit der vorliegenden Randbedingung an der Wand wird

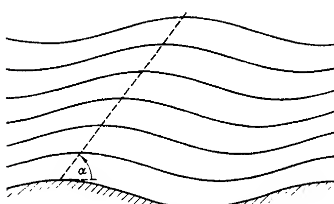


Fig. 67. Stromlinien längs einer welligen Wand: $Ma_\infty = 1/\sin\alpha = 1{,}25$

$$v_s(y = 0) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = -\beta_* f'(x) = U\varepsilon\alpha\cos\alpha x$$

und folglich allgemein für $y \geqq 0$:

$$\varphi = f = -\frac{U\varepsilon}{\beta_*}\sin\alpha(x - \beta_* y) \tag{2.253}$$

$$u_s = -\frac{U\varepsilon\alpha}{\beta_*}\cos\alpha\,(x - \beta_* y) \tag{2.254}$$

$$v_s = U\varepsilon\alpha\cos\alpha(x - \beta_* y)\,. \tag{2.255}$$

In (reibungsloser) Überschallströmung pflanzen sich die Wandstörungen längs der Mach-Linien ungeschwächt beliebig weit fort. Das Stromlinienbild in Fig. 67 ist hier – im Gegensatz zur Unterschallströmung – nicht mehr unabhängig von der

[1]) Physikalische Hydrodynamik, Berlin 1933.

Strömungsrichtung. Dementsprechend übt das Gas auf die ganze Wand eine Kraft aus, die als Resultierende der Wanddrucke berechnet werden kann. In erster Näherung gilt

$$c_p = -2\frac{u_s(y=0)}{U} = \frac{2\varepsilon\alpha}{\beta_*}\cos\alpha x. \tag{2.256}$$

Auf die wellige Wand wirkt daher in x-Richtung eine Druckkraft K je Wellenlänge l (und je Längeneinheit in Querrichtung):

$$K = \frac{\varrho_\infty}{2}U^2\int_0^l c_p\left(\frac{dy_0}{dx}\right)dx = \frac{\varrho_\infty}{2}U^2\cdot\frac{2\pi\varepsilon^2\alpha}{\beta_*}. \tag{2.257}$$

Dagegen verschwindet diese Druckresultierende in Unterschallströmung und auch bei den oben erwähnten zellularen Wellen, deren Stromlinienbild sich auch nicht mit der Anströmrichtung änderte. Diese spezielle Lösung mit $\varphi = F(x)\cdot G(y)$ nach Gl. (2.251) wäre übrigens aus der allgemeinen Lösung als Überlagerung zweier Schallwellen mit $\varphi = f(x-\beta_* y) + g(x+\beta_* y)$ abzuleiten, mit

$$f = \frac{U\varepsilon}{\beta_*}\left[-\frac{1}{2}\sin\alpha(x-\beta_* y) + \frac{1}{2}C\cos\alpha(x-\beta_* y)\right]$$

und

$$g = \frac{U\varepsilon}{\beta_*}\left[\frac{1}{2}\sin\alpha(x+\beta_* y) + \frac{1}{2}C\cos\alpha(x+\beta_* y)\right].$$

Wie anfangs dargelegt wurde, kann die gasdynamische Gleichung bei schallnaher Strömung grundsätzlich nicht linearisiert werden. Die Strömung einer schwach gestörten Parallelströmung mit $Ma_\infty \approx 1$ kann man jedoch iterativ auf Grund der Gleichung (2.236) berechnen, solange noch $Ma \neq 1$ ist. In Fig. 68 ist nach H. Görtler[1]) die so gefundene Strömung längs einer welligen Wand bei $Ma_\infty = 0{,}9$ gezeichnet. Das Beispiel zeigt die für schallnahe Strömungen charakteristischen lokalen Überschallgebiete über den Wellenbergen.

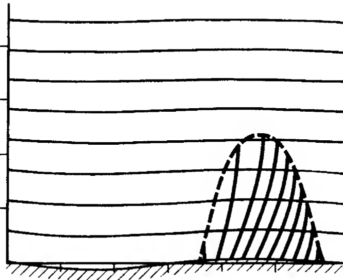


Fig. 68.
Stromlinien längs einer welligen Wand: $Ma_\infty = 0{,}9$ (Im Überschallgebiet sind Mach-Linien angegeben)

2.3.11. Prandtl-Glauertsche Regel für Unterschallströmung. Die linearisierte Gleichung (2.239) für das Geschwindigkeitspotential $\Phi = Ux + \varphi$ einer schwach gestörten Parallelströmung im Unterschallbereich $Ma_\infty = U/c_\infty < 1$ lautet

$$\Phi_{xx} + \frac{1}{\beta^2}\Phi_{yy} = 0, \quad \text{mit} \quad 0 < \beta = \sqrt{1 - Ma_\infty^2} < 1. \tag{2.258}$$

1) ZAMM **20** (1940), S. 254.

Offensichtlich läßt sich diese Gleichung auf die einfachere Laplace-Gleichung zurückführen durch die Koordinatentransformation

$$\xi = x, \quad \eta = \beta y. \tag{2.259}$$

Dann wird nämlich

$$\Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\eta\eta} = 0 \tag{2.260}$$

und man kann jetzt $\Phi(\xi, \eta)$ als das Potential einer inkompressiblen Strömung in der ξ, η-Ebene auffassen. Für die Geschwindigkeiten $U + u_s$, v_s in der x, y-Ebene und $U + \bar{u}_s, \bar{v}_s$ in der ξ, η-Ebene gilt an entsprechenden Punkten

$$U + u_s = \Phi_x, \; U + \bar{u}_s = \Phi_\xi = \Phi_x \quad \text{also} \quad u_s = \bar{u}_s \tag{2.261}$$

$$v_s = \Phi_y, \; \bar{v}_s = \Phi_\eta = \frac{1}{\beta}\Phi_y \qquad \text{also} \quad v_s = \beta\,\bar{v}_s. \tag{2.262}$$

Daher ist die Neigung einander entsprechender Stromlinien – insbesondere auch solcher, die Körperkonturen darstellen – in der x, y-Ebene um den Faktor $\beta \leq 1$ kleiner als in der ξ, η-Ebene, da ja auch für die Neigung näherungsweise gilt

$$\frac{v_s}{U} = \beta \cdot \frac{\bar{v}_s}{U}. \tag{2.263}$$

Andererseits sind die zugehörigen Störgeschwindigkeiten in Anströmungsrichtung u_s und $\bar{u}_s$ in beiden Ebenen gleich groß und damit, wegen (2.242) $c_p = -2u_s/U$, auch die Drucke.

Kennt man aus einer Rechnung oder einer Messung bei kleiner Mach-Zahl ($Ma_\infty \approx 0$) etwa die Druckverteilung und den Auftrieb eines schlanken Flügelprofils (Dickenverhältnis δ = Profildicke/Flügeltiefe) bei kleinem Anstellwinkel α, so weiß man nun, daß dieselbe Druckverteilung und der gleiche Auftriebsbeiwert bei einer Mach-Zahl Ma_∞ mit einem affinen, dünneren Profil (Dickenverhältnis $\beta\delta$) beim kleineren Anstellwinkel $\beta\alpha$ erzielt werden. Umgekehrt sind für ein und dasselbe Profil, das bei festgehaltenem Anstellwinkel unter verschiedenen Mach-Zahlen angeblasen wird, die Drucke und damit sein Auftrieb proportional zu $1/\beta = 1/\sqrt{1 - Ma^2} > 1$.

Diese Regeln sind unabhängig von einander von L. Prandtl und H. B. Glauert gefunden worden; experimentell werden sie z. B. für ein Profil von 10% Dicke bis etwa $Ma_\infty = 0{,}8$ bestätigt. Daß die Voraussetzung $u_s, v_s \ll U$ in einer kleinen Umgebung des Staupunkts gar nicht erfüllt wird, ist anscheinend bedeutungslos. Wichtig ist jedoch die Erfüllung der Voraussetzung, daß die Strömung überall im elliptischen Unterschallbereich bleibt. Man nennt diejenige kleinste Mach-Zahl $Ma_\infty < 1$ der Anströmung kritisch, bei der an der Stelle des Druckminimums des betrachteten Profils die örtliche Mach-Zahl eins erreicht wird. Wird die Anströmgeschwindigkeit ($U < c$) über diese kritische Mach-Zahl gesteigert, so entsteht ein lokales Überschallgebiet ähnlich wie in Fig. 68 und schließlich auch ein Verdichtungsstoß, womit der Gültigkeitsbereich der obigen Regeln natürlich überschritten wird.

2.3.12. Dünnes Flügelprofil in ebener Überschallströmung. Für reine Überschallströmung lautet die linearisierte Gleichung für das Störungspotential

$$\beta_*^2 \varphi_{xx} - \varphi_{yy} = 0, \quad \text{mit} \quad \beta_*^2 = Ma_\infty^2 - 1 > 0. \qquad (2.250)$$

Die allgemeine Lösung dieser Wellengleichung ist

$$\varphi = f(x - \beta_* y) + g(x + \beta_* y). \qquad (2.252)$$

Ähnlich wie bei der welligen Wand ist auch für einen dünnen Flügel in Überschallströmung vorauszusetzen, daß die von ihm verursachten Störungen sich nur längs der vom Flügel aus stromabwärts verlaufenden Charakteristiken fortpflanzen können. Deshalb muß man bei einer Anströmung wie in Fig. 69 auf der Flügeloberseite $g = 0$ und auf der Unterseite $f = 0$ setzen.

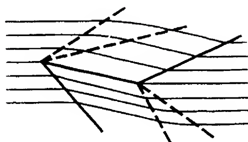


Fig. 69.
Ebene Überschallströmung um eine angestellte Platte nach A. BUSEMANN (Handbuch der Experimentalphysik IV, 1931, S. 443)

Die Randbedingung selbst lautet somit auf der Oberseite, deren Kontur als $y_o(x) \approx 0$ gegeben sei,

$$\frac{v_o(x, +0)}{U} = \frac{dy_o}{dx} = \frac{1}{U}\varphi_y(x, +0) = -\frac{1}{U}\beta_* f'(x)$$

so daß

$$f'(x) = -\frac{U}{\beta_*}\frac{dy_o}{dx}. \qquad (2.264)$$

Entsprechend wird auf der Unterseite $y_u(x) \approx 0$:

$$g'(x) = \frac{U}{\beta_*}\frac{dy_u}{dx}. \qquad (2.265)$$

Der Druckbeiwert am Profil wird somit

$$c_p = -2\frac{u_s}{U} = -\frac{2}{U}\varphi_x(x, \pm 0),$$

also auf der Oberseite

$$c_{po} = -\frac{2}{U}f'(x) = \frac{2}{\beta_*}\frac{dy_o}{dx} \qquad (2.266)$$

und auf der Unterseite

$$c_{pu} = -\frac{2}{U}g'(x) = -\frac{2}{\beta_*}\frac{dy_u}{dx}. \qquad (2.267)$$

Insbesondere folgt weiter für das denkbar einfachste Profil, die ebene dünne Platte mit kleinem Anstellwinkel α

$$\frac{dy_o}{dx} = \frac{dy_u}{dx} = -\tan\alpha \approx -\alpha. \qquad (2.268)$$

Der Unterdruck auf der Oberseite und der Überdruck unten ist hier überall gleich groß, so daß die resultierende Druckkraft in Plattenmitte angreift. Insgesamt wird nun der Auftriebs- und Widerstandsbeiwert

$$c_a = (c_{pu} - c_{po}) \cdot \cos\alpha = \frac{4\alpha}{\beta_*} = \frac{4\alpha}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} \tag{2.269}$$

$$c_w = (c_{pu} - c_{po}) \cdot \sin\alpha = \frac{4\alpha^2}{\beta_*} = \frac{4\alpha^2}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}}\,. \tag{2.270}$$

Für die gleiche Platte im inkompressiblen Medium war früher in 2.2.3.2 gefunden worden

$$c_a = 2\pi\alpha\,, \qquad c_w = 0\,. \tag{2.59}$$

Danach gibt die Prandtl-Glauertsche Regel in 2.3.11 für Unterschallanströmung

$$c_a = \frac{2\pi\alpha}{\sqrt{1 - Ma_\infty^2}}\,, \qquad c_w = 0\,, \tag{2.271}$$

und der Druckpunkt liegt hier bei 1/4 Flügeltiefe hinter der Anströmkante.

Die Profiltheorie für reine Überschallströmung erweist sich auch bei endlich dicken und gewölbten Profilen als wesentlich einfacher als im Unterschallbereich. Das erklärt sich daraus, daß in diesem hyperbolischen Fall die Strömungen oberhalb und unterhalb des Flügels sich nicht gegenseitig beeinflussen. Bemerkenswert ist ferner der Wellenwiderstand bei Überschallströmung, der sich ganz unabhängig von der eventuellen Zähigkeit des Gases ergibt. Der Arbeitsleistung dieses Widerstands entspricht die Entropievermehrung (je Zeiteinheit) im ganzen Strömungsraum hinter dem Flügel, die allerdings in der linearisierten Theorie örtlich überall als klein vorausgesetzt wird, um wirbelfreie Potentialströmung annehmen zu können.

3. Zähe Flüssigkeiten

3.1. Energiedissipation

Die Strömung einer reibungslosen Flüssigkeit ist kinematisch und dynamisch umkehrbar in dem Sinne, daß sie zeitlich vorwärts oder rückwärts völlig gleich verläuft, wenn die äußere Kraft und die Randbedingungen nicht von der Zeit abhängen. Ist nämlich $\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$ eine Lösung der Euler-Gleichung für die jeweiligen Randbedingungen, so ist offenbar auch $-\boldsymbol{v}(x,y,z,-t)$ eine Lösung, bei der jedoch jedes Flüssigkeitsteilchen die ursprüngliche Bahnlinie in entgegengesetzter Richtung durchläuft. Da die Beschleunigungsglieder in der Euler-Gleichung bei dem Vorzeichenwechsel von $\boldsymbol{v}$ und t nicht verändert werden, bleibt auch das Druckfeld $p(x,y,z,t) = p(x,y,z,-t)$ unverändert und damit auch der Druck der Flüssigkeit auf einen umströmten Körper, wenn die An-

strömungsrichtung umgekehrt wird, während man in wirklichen Flüssigkeiten dann gerade entgegengesetzte Widerstandskräfte erwartet.

Ebenso sind auch Strömungen reibungsloser Gase umkehrbar, solange die Schallgeschwindigkeit nicht erreicht wird. Erst bei Überschallströmungen – wie z. B. bei der gestörten Parallelströmung längs einer welligen Wand (vgl. 2.3.10) – ergibt sich die Strömungsrichtung eindeutig aus der zeitlichen Reihenfolge von Ursache und Wirkung. Denn wegen der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit c kann sich eine Störung nur noch stromabwärts auswirken, wenn $Ma = |\boldsymbol{v}|/c > 1$ ist.

Wird jedoch die Zähigkeit der Flüssigkeit oder des Gases mitberücksichtigt, so zeigt die Navier-Stokessche Gleichung, daß die Strömungsrichtung oder der zeitliche Ablauf einer Strömung nicht mehr umkehrbar ist. Denn mit $\boldsymbol{v} \to -\boldsymbol{v}$ und $t \to -t$ wechselt das Reibungsglied $-\nu \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ sein Vorzeichen, während alle übrigen Glieder unverändert bleiben.

Strömungen zäher Medien sind nun auch im thermodynamischen Sinn nicht umkehrbar, wie im folgenden gezeigt wird. Die von den Reibungsspannungen in der Zeiteinheit geleistete Arbeit A ist nämlich größer als der örtliche Zuwachs an potentieller und kinetischer Energie. Der Arbeitsüberschuß, der somit mechanisch verloren geht und Dissipation genannt wird, ist in der Energiebilanz als Reibungswärme anzusehen. Dieser Umwandlung mechanischer Energie in Wärme, oft bei praktisch konstanter Temperatur, entspricht ein irreversibler Entropiezuwachs. An den Stellen des strömenden Mediums, an denen größere Schubspannungen auftreten – wie z. B. im Öl eines Gleitlagers – wird infolge der Dissipation die Temperatur erhöht gegenüber der Temperatur an anderen Stellen; es entsteht daher auch ein Wärmestrom in der Flüssigkeit. Wegen der Temperaturabhängigkeit der Dichte ϱ, Zähigkeit μ und Wärmeleitfähigkeit λ ist darum schließlich das Medium – streng genommen – nicht mehr homogen.

Zur Aufstellung des Energiesatzes betrachten wir in einem raumfesten und zeitlich unveränderlichen Volumen V (Begrenzungsfläche $\boldsymbol{F}$) die zeitliche Änderung und den Zu- und Abfluß von kinetischer und innerer Energie ($\boldsymbol{v}^2/2$ bzw. e je Masseneinheit).

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \left(\frac{\varrho \boldsymbol{v}^2}{2} + \varrho e\right) \mathrm{d}\tau + \int \left(\frac{\varrho \boldsymbol{v}^2}{2} + \varrho e\right) \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\boldsymbol{F}. \tag{3.1}$$

Formt man das Flächenintegral nach Gauß um in ein Volumenintegral, so wird – mit der Kontinuitätsgleichung $\partial\varrho/\partial t + \operatorname{div} \varrho \boldsymbol{v} = 0$ –:

$$\begin{aligned} &\int \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varrho \boldsymbol{v}^2}{2} + \varrho e\right) \mathrm{d}\tau + \int \operatorname{div}\left[\varrho \boldsymbol{v}\left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + e\right)\right] \mathrm{d}\tau \\ &\quad = \int \left[\varrho \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + e\right) + \left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + e\right)\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right] \mathrm{d}\tau + \int \left[\varrho\, \boldsymbol{v} \operatorname{grad}\left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + e\right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + e\right)\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right] \mathrm{d}\tau = \int\limits_V \varrho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + e\right) \mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Diese Energieänderung wird bewirkt durch die Arbeiten der inneren Spannungen (A) und der äußeren Kräfte (beide je Zeiteinheit), sowie durch die dem

betrachteten Volumen infolge der Wärmeleitung zugeführten Wärmemenge:

$$\int_V \varrho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2}+e\right)\mathrm{d}\tau = A + \int_V \varrho \boldsymbol{K}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\tau + \int \lambda \,\mathrm{grad}\, T\,\mathrm{d}\boldsymbol{F}$$

$$= A + \int_V \varrho \boldsymbol{K}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\tau + \int_V \mathrm{div}\,(\lambda\,\mathrm{grad}\,T)\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{3.3}$$

Die Arbeit, die z. B. von den Spannungen σ_x und τ_{xy} an einem Volumenelement $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ wie in Fig. 2 (S. 15) in der Zeiteinheit geleistet wird, ist nun

$$\left[-\sigma_x u + \left(\sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\right]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{3.4}$$

$$\left[-\tau_{xy} v + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\left(v + \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\right]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy} v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,. \tag{3.5}$$

Die gesamte Arbeit aller inneren Spannungen in V wird demnach

$$A = \int_V a\,\mathrm{d}\tau = \int \left\{\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx} u + \sigma_y v + \tau_{yz} w) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx} u + \tau_{zy} v + \sigma_z w)\right\}\mathrm{d}\tau\,. \tag{3.6}$$

Nur ein Teil dieser Arbeit wird aber zur Vergrößerung der kinetischen Energie, d. h. als Beschleunigungsarbeit benötigt, wie man mit Hilfe der Bewegungsgleichungen für beliebige Medien (vgl. 1.4.4) zeigen kann. Diese lauten nämlich

$$\begin{aligned}
\varrho \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - \varrho X &= \frac{\partial}{\partial x}\sigma_x + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zx} \\
\varrho \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \varrho Y &= \frac{\partial}{\partial x}\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_y + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zy} \\
\varrho \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} - \varrho Z &= \frac{\partial}{\partial x}\tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_z\,,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

wo $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z$ die äußere Kraft je Masseneinheit bezeichnet. Hieraus folgen insbesondere die Navier-Stokesschen Gleichungen, wenn

$$\sigma_x = -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \mu'\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} \tag{1.73}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \text{usw.} \tag{1.74}$$

Multipliziert man die obigen Gleichungen (3.7) mit u, v, w und addiert, so wird

$$\varrho\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} - \varrho\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{v} = a' = u\left(\frac{\partial}{\partial x}\sigma_x + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zx}\right) +$$

$$+ v\left(\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_y + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zy}\right) +$$

$$+ w\left(\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_z\right). \tag{3.8}$$

Für ein endliches, raumfestes Volumen V gilt also

$$\int_V \varrho \boldsymbol{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} d\tau - \int_V \varrho \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{v} d\tau = \int_V a' d\tau = A' . \tag{3.9}$$

Führt man diese Beziehung in die oben aufgestellte Energiegleichung ein, so erhält man schließlich

$$\int_V \varrho \frac{de}{dt} d\tau - \int_V \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) d\tau = A - A' = \int (a - a') d\tau$$
$$= \int_V \Big\{ \sigma_x u_x + \tau_{xy} v_x + \tau_{xz} w_x + \tau_{yx} u_y + \sigma_y v_y + \tau_{yz} w_y + \tau_{zx} u_z + \tau_{zy} v_z + \sigma_z w_z \Big\} d\tau . \tag{3.10}$$

Da diese Gleichung für ein beliebiges Volumen V abgeleitet wurde, muß sie bei stetigen Änderungen, d. h. unter Ausschluß von Stoßfronten, bereits für die Integranden gelten

$$\varrho \frac{de}{dt} = (a - a') + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) . \tag{3.11}$$

Nach dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik ist nun die Änderung der inneren Energie e gleich der Differenz von zugeführter Wärme δq und abgegebener mechanischer Arbeit:

$$de = \delta q - p \, d\left(\frac{1}{\varrho}\right) . \tag{2.163}$$

Die substantielle Änderung der inneren Energie einer in der Strömung mitbewegten Masseneinheit wird entsprechend

$$\frac{de}{dt} = \frac{dq}{dt} - p \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\varrho}\right) . \tag{3.12}$$

Für die Wärmemenge, die in der Zeit dt der Volumeneinheit zugeführt wird, gilt demnach wegen Gleichung (3.11) die schon in 2.3.1 aufgestellte Gleichung (2.172):

$$\varrho \frac{dq}{dt} = \varrho \frac{de}{dt} + p \varrho \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\varrho}\right) = (a - a') + p \varrho \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\varrho}\right) + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) . \tag{3.13}$$

Schreibt man noch für die Normalspannungen

$$\sigma_x = -p + \sigma_x' , \quad \sigma_y = -p + \sigma_y' \quad \text{und} \quad \sigma_z = -p + \sigma_z' ,$$

so ergibt Gleichung (3.10) für $a - a'$ einen Audsruck D, der nur von den Reibungsspannungen σ_x', τ_{xy} usw. abhängt, und ein zusätzliches Glied

$$- p (u_x + v_y + w_z) = - p \operatorname{div} \boldsymbol{v} . \tag{3.14}$$

Dieses kann mit der Kontinuitätsgleichung umgeformt werden:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho \boldsymbol{v} = 0 = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} \varrho + \varrho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \boldsymbol{v},$$

so daß

$$-p \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{p}{\varrho} \frac{d\varrho}{dt} = -p\varrho \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\varrho}\right). \tag{3.15}$$

Daher kann man Gleichung (3.13) mit (3.11) auch schreiben:

$$\varrho \frac{dq}{dt} = D + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T), \tag{3.16}$$

wobei

$$D = \sigma_x' u_x + \tau_{xy} v_x + \tau_{xz} w_x + \tau_{yx} u_y + \sigma_y' v_y + \tau_{yz} w_y + \\ + \tau_{zx} u_z + \tau_{zy} v_z + \sigma_z' w_z. \tag{3.17}$$

Offensichtlich ist nun D die gesuchte Reibungswärme, die in der Strömung eines zähen Mediums in der Volumen- und Zeiteinheit entsteht. Für Newtonsche Flüssigkeiten oder Gase wird mit den oben wieder angegebenen Gleichungen (1.73) und (1.74):

$$D = \mu \left\{2\left(u_x^2 + v_y^2 + w_z^2\right) + (w_y + v_z)^2 + (v_x + u_y)^2 + (u_z + w_x)^2\right\} + \\ + \mu' (\operatorname{div} \boldsymbol{v})^2 \tag{3.18}$$

$$D = \mu \left\{(\operatorname{rot} \boldsymbol{v})^2 + 2 \operatorname{div}\left(\operatorname{grad} \frac{\boldsymbol{v}^2}{2} - \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v}\right) - 2\boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\right\} + \\ + \mu' (\operatorname{div} \boldsymbol{v})^2 \tag{3.19}$$

Aus der ersten Schreibweise geht hervor, daß D nie negativ sein kann und nur dort verschwindet, wo die Flüssigkeitsteilchen nicht deformiert werden, wo also die strömende Flüssigkeit sich nur wie ein einziger starrer Körper bewegt.

Für inkompressible Flüssigkeiten fallen die Glieder mit div $\boldsymbol{v}$ natürlich fort. Kann man außerdem überall gleiche Zähigkeit annehmen, so erhält man für die gesamte Dissipation im ganzen Strömungsraum, der von der Fläche F umgrenzt wird:

$$\int D \, d\tau = \mu \int (\operatorname{rot} \boldsymbol{v})^2 d\tau + 2\mu \int \left(\operatorname{grad} \frac{\boldsymbol{v}^2}{2} - \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v}\right) \cdot d\boldsymbol{F}. \tag{3.20}$$

Das zweite Integral ist bereits nach Gauß in ein Oberflächenintegral umgeformt, dessen Integrand gleich der konvektiven Beschleunigung ($\boldsymbol{v}$ grad) $\boldsymbol{v}$ ist. Wenn insbesondere auf F die Geschwindigkeit überall verschwindet, wie etwa bei der Strömung in einem geschlossenen Gefäß, an dessen Wänden die Flüssigkeit haftet, oder wenn auf F überall konstante Geschwindigkeit herrscht, wie in einer Parallelströmung, so wird einfach

$$\int D \, d\tau = \mu \int (\operatorname{rot} \boldsymbol{v})^2 \, d\tau. \tag{3.21}$$

Auch diese Gleichung zeigt die zentrale Bedeutung des Wirbelvektors in der Strömungslehre.

3.1.1. Ein Minimalsatz für die Dissipation. Für gewisse Strömungen einer inkompressiblen Flüssigkeit konstanter Zähigkeit hat nach Helmholtz und Rayleigh die Dissipation eine interessante Minimaleigenschaft. Für ein beliebiges raumfestes Volumen wird

$$I \equiv \frac{1}{\mu} \int\limits_V D \, d\tau = \int\limits_V (\operatorname{rot} \boldsymbol{v})^2 \, d\tau + 2 \int (\boldsymbol{v} \operatorname{grad}) \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{F}. \tag{3.22}$$

Variiert man das Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{v}$ um eine beliebige Ortsfunktion $\delta \boldsymbol{v}$, die jedoch am Rand des betrachteten Strömungsgebietes, also auf $\boldsymbol{F}$, verschwinden soll, so ändert sich das Integral I um

$$\delta I = \int [(\operatorname{rot} \delta \boldsymbol{v})^2 + 2 \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \operatorname{rot} \delta \boldsymbol{v}] \, d\tau + \\ + 2 \int [(\boldsymbol{v} \operatorname{grad}) \delta \boldsymbol{v} + (\delta \boldsymbol{v} \operatorname{grad}) \boldsymbol{v} + (\delta \boldsymbol{v} \operatorname{grad}) \delta \boldsymbol{v}] \cdot d\boldsymbol{F}. \tag{3.23}$$

Die beiden letzten Flächenintegrale verschwinden wegen der Voraussetzung $\delta \boldsymbol{v} = 0$ auf $\boldsymbol{F}$.

Mit den Umformungen:

$$\operatorname{div} [\delta \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v}] = \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{rot} \delta \boldsymbol{v} - \delta \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \tag{3.24}$$

$$\operatorname{rot} [\delta \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}] = (\boldsymbol{v} \operatorname{grad}) \delta \boldsymbol{v} - (\delta \boldsymbol{v} \operatorname{grad}) \boldsymbol{v} + \delta \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{div} \delta \boldsymbol{v}, \tag{3.25}$$

dem Stokesschen Satz für eine geschlossene Fläche

$$\oint \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{F} = 0, \quad \text{hier mit} \quad \boldsymbol{A} = \delta \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}, \tag{1.33}$$

und der Nebenbedingung, daß auch die variierte Bewegung kinematisch möglich sein soll, so daß $\operatorname{div} \delta \boldsymbol{v} = 0$,

wird dann $$\delta I = \int (\operatorname{rot} \delta \boldsymbol{v})^2 \, d\tau + 2 \int \delta \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \, d\tau. \tag{3.26}$$

Das erste Integral ist offenbar stets positiv. Eine allgemeine Aussage über das zweite Integral ist dann möglich, wenn das Ausgangsfeld $\boldsymbol{v}$ noch folgende, kinematische Beziehung erfüllt, wenn nämlich

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \operatorname{grad} F(x, y, z, t) \tag{3.27}$$

gilt und F irgendeine stetig differenzierbare Potentialfunktion mit $\Delta F = 0$ ist. Dann wird mit

$$\operatorname{div} (F \delta \boldsymbol{v}) = F \operatorname{div} \delta \boldsymbol{v} + \delta \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} F, \quad \text{und} \quad \delta \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{auf } \boldsymbol{F},$$

$$\int \delta \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \, d\tau = \int \operatorname{div} (F \delta \boldsymbol{v}) \, d\tau = \int F \, \delta \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{F} = 0,$$

und somit $$\delta I = \int (\operatorname{rot} \delta \boldsymbol{v})^2 \, d\tau \geqslant 0. \tag{3.28}$$

In Strömungen inkompressibler Flüssigkeiten konstanter Zähigkeit, für die ein Potential F der Rotation des Wirbelvektors existiert, ist also zu jedem Zeitpunkt und in jedem Strömungsgebiet die Dissipation kleiner als diejenige anderer, kinematisch möglicher Strömungen mit der gleichen Geschwindigkeit am Rand des betrachteten Strömungsgebiets. Wegen der Navier-Stokesschen Gleichung ist die Forderung der Existenz eines solchen Potentials F gleichbedeutend mit der Voraussetzung, daß die Reibungskraft und – falls die äußere Kraft ein Potential hat – auch die substantielle Beschleunigung aus einem Potential abgeleitet werden kann.

Triviale derartige Fälle sind die sogenannten Scherströmungen, bei denen überall rot $\boldsymbol{v} = \text{const}$ angenommen wird. Näherungsweise ist die Voraussetzung für alle stationären, schleichenden Strömungen erfüllt mit $Re \ll 1$, wenn $\boldsymbol{v}$ so klein ist, daß die in $\boldsymbol{v}$ quadratischen Glieder vernachlässigt werden können. Ferner wird sie exakt befriedigt von den parabelförmigen Geschwindigkeitsprofilen der ebenen Strömung zwischen zwei parallelen Platten und der entsprechenden drehsymmetrischen Strömung in einem Kreisrohr. Für diese stationäre Rohrströmung kann man übrigens weiterhin noch folgern, daß die Dissipation und damit auch der Druckabfall bei vorgegebener Durchflußmenge für laminare Strömung kleiner ist als für turbulente. (Dagegen wird z. B. der Widerstand einer Kugel nach Fig. 11 durch das Turbulentwerden der Reibungsschicht bei großen Re-Zahlen verkleinert!)

Eine Erweiterung des obigen Satzes über die Dissipation auf Flüssigkeiten veränderlicher Zähigkeit oder auf Gase wäre möglich, aber physikalisch nicht sinnvoll, solange nur die Geschwindigkeit variiert würde und dabei die Abhängigkeit von μ, μ' und ϱ vom Geschwindigkeitsfeld selbst unberücksichtigt bliebe.

3.2. Allgemeine Folgerungen aus der Navier-Stokesschen Gleichung

Im folgenden betrachten wir Strömungen in inkompressiblen Flüssigkeiten mit konstanter Zähigkeit; die äußere Kraft habe ein Potential Ω:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \tag{1.25}$$

$$\boldsymbol{b} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{grad}\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} - \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\varrho}\operatorname{grad} p + \operatorname{grad}\Omega - \nu \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{v}\,. \tag{1.79}$$

Bildet man die Divergenz dieser Gleichung, so wird das Reibungsglied eliminiert und man erhält:

$$-\Delta(p/\varrho - \Omega) = \operatorname{div}(\boldsymbol{v} \operatorname{grad} \boldsymbol{v}) = u_x^2 + v_y^2 + w_z^2 + 2\,(v_x u_y + w_y v_z + u_z w_x)\,. \tag{3.29}$$

Für beliebige, auch instationäre Strömungen erweist sich demnach Δp als unabhängig von der Zähigkeit; insbesondere kann man für schleichende Strömungen die rechte Gleichungsseite vernachlässigen, und es ergibt sich p als Potentialfunktion:

$$\Delta p = 0\,, \quad \text{falls auch} \quad \Delta\Omega = 0\,. \tag{3.30}$$

Dieser enge Zusammenhang zwischen Druck- und Geschwindigkeitsfeld erinnert an die Bernoulli-Gleichung für reibungslose Flüssigkeiten. Für zähe Flüssigkeiten kann man ein Analogon dazu jedoch nur für die oben erwähnten Spezialfälle aufstellen, wenn

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \operatorname{grad} F\,. \tag{3.27}$$

Im stationären Fall wird dann nämlich, ähnlich wie in 1.4.1,

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + \frac{p}{\varrho} - \Omega + \nu F\right) = \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v}\,.$$

Längs einer Stromlinie $d\boldsymbol{s} \,||\, \boldsymbol{v}$ ist diese Gleichung wieder integrierbar und gibt

$$\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + \frac{p}{\varrho} - \Omega + \nu F = \text{const} \tag{3.31}$$

längs einer Stromlinie.

Im allgemeinen existiert aber kein Potential F für die Reibungskraft, und dann ist eine solche Integration nicht möglich.

Für den Wirbelvektor $\boldsymbol{w} = \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ kann man aus der Navier-Stokesschen Gleichung durch Bildung der Rotation eine allgemein gültige Gleichung gewinnen, wobei das Druckglied fortfällt:

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} - \operatorname{rot}\,[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}] = -\nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{w}, \quad \text{oder}$$

$$\frac{d\boldsymbol{w}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \operatorname{grad})\, \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{w} \operatorname{grad})\, \boldsymbol{v} - \nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{w}\,. \tag{3.32}$$

Setzt man $\nu = 0$, so hat man die Gleichung, von der Helmholtz zur Ableitung seiner Wirbelsätze (vgl. 2.1.3) ausging; die Wirbellinien bewegen sich mit der Strömung, und die Zirkulation um eine Wirbelröhre bleibt dabei konstant. Die Rotation eines Flüssigkeitsteilchens kann sich in reibungsloser Flüssigkeit nur dadurch ändern, daß es Teil einer Wirbelröhre ist, die gestreckt oder gestaucht wird, das Glied $(\boldsymbol{w} \operatorname{grad})\, \boldsymbol{v}$ bedeutet ja die Änderung der Geschwindigkeit in Richtung der Wirbellinie $\boldsymbol{w}$ multipliziert mit dem Betrag von $\boldsymbol{w}$.

In ebener Strömung ist eine solche Streckung der Wirbellinien nicht möglich, und das Glied $(\boldsymbol{w} \operatorname{grad})\, \boldsymbol{v}$ verschwindet hier stets, da ja $\boldsymbol{w} \perp \boldsymbol{v}$. Daher vereinfacht sich hier die obige Wirbelgleichung zu

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \boldsymbol{v} \operatorname{grad} \omega = \nu \Delta \omega\,, \quad \text{mit} \quad \omega \equiv |\boldsymbol{w}| = v_x - u_y\,. \tag{3.33}$$

Diese Gleichung entspricht völlig der für die Wärmeleitung in einem homogenen Strömungsmedium mit $\lambda = \text{const}$; nach Gl. (3.16) gilt zunächst

$$\varrho \frac{dq}{dt} = D + \operatorname{div}\,(\lambda \operatorname{grad} T)\,.$$

Ist die Temperaturerhöhung infolge der Reibungswärme klein gegen Temperaturunterschiede innerhalb der Flüssigkeit, die etwa von außen aufgezwungen werden (wie z. B. in einer Kühlerflüssigkeit), so wird mit $D = 0$ und $dq = c_p dT$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \operatorname{grad})\, T = \frac{\lambda}{\varrho c_p} \Delta T\,. \tag{3.34}$$

Der Rotation ω entspricht die Temperatur T, der kinematischen Zähigkeit ν die dimensionsgleiche Temperaturleitzahl $\lambda/\varrho c_p$.

In der Potentialtheorie wird gezeigt, daß ΔT ein Maß dafür ist, um wieviel der Wert von T im Punkt $P(x,y,z)$ kleiner ist als der Mittelwert aller T-Werte auf einer infinitesimalen Kugel mit dem Mittelpunkt in $P(x,y,z)$; ist ΔT negativ, so ist $T(x,y,z)$ größer als der Mittelwert in den Nchbarpunkten. Abgesehen von dem rein konvektiven Transportglied $(\boldsymbol{v} \operatorname{grad})\, T$ bewirkt die Wärmeleitung ein Ansteigen von T in P mit der Zeit ($\partial T/\partial t > 0$), wenn $\Delta T > 0$, wodurch T in P mit der Zeit an die zunächst höheren Werte in der Umgebung P angeglichen wird. Dieses Ausgleichen von Temperaturdifferenzen ist natürlich schon im linearen Ansatz: Wärmestrom proportional dem Temperaturgradienten enthalten. Aus der Analogie mit der Wirbelgleichung (3.33) folgt nun, daß die

Zähigkeit mit der Zeit ein Ausgleichen der Drehung im Strömungsgebiet bewirkt. Auch im allgemeinen, dreidimensionalen Fall ergibt sich eine solche **Wirbeldiffusion**; schreibt man Gleichung (3.32) aus für die einzelnen cartesischen Komponenten von $\boldsymbol{w}$, so kann man ja $-\nu$ rot rot $\boldsymbol{w}$ durch $\nu \Delta \boldsymbol{w}$ ersetzen.

Wegen dieser Wirbeldiffusion im Innern einer zähen Flüssigkeit, können Wirbel nicht im Innern entstehen, sondern nur am Rand eines Strömungsgebiets. So bestehen z. B. alle Wirbel im Nachlauf eines Schiffes aus Flüssigkeitsteilchen, die vorher in der Grenzschicht längs des Schiffes in Drehung versetzt worden sind; hinter dem Schiff wird infolge der Wirbeldiffusion das Gebiet mit nichtverschwindender Rotation allmählich immer breiter, wobei gleichzeitig die kinetische Energie der Wirbel nach und nach in Wärmeenergie umgewandelt wird.

3.3. Exakte Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichung

3.3.1. Poiseuille- oder Rohrströmung. Die denkbar einfachste, stationäre Strömung ist offenbar die in einem sehr langen geraden Rohr mit konstantem Querschnitt, auch wenn dieser nicht kreisförmig ist. Ist die x-Achse parallel zur Rohrachse, so gilt $v = w = 0$ und wegen der Kontinuitätsgleichung $u = u(y,z)$. Die zweite und dritte Komponente der Navier-Stokesschen Gleichung gibt $\partial p/\partial y = \partial p/\partial z = 0$ und die erste fordert

$$\Delta u(y,z) = \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \text{const} < 0, \tag{3.35}$$

mit $u = 0$ am Rand R des Querschnitts. Setzt man an

$$u = \frac{1}{4\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(y^2 + z^2) + \Psi(y,z), \tag{3.36}$$

so soll Ψ eine Potentialfunktion mit $\Delta\Psi = 0$ sein, die die Randwerte hat:

$$\Psi_{\mathrm{R}} = -\frac{1}{4\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(y_{\mathrm{R}}^2 + z_{\mathrm{R}}^2). \tag{3.37}$$

Die Durchflußmenge ist definiert durch

$$Q = \iint u \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \tag{3.38}$$

Wenn auch die so berechenbare, ausgebildete, laminare Rohrströmung technisch kaum interessiert, so kann man doch fragen, welcher Querschnitt zum Transport einer Flüssigkeit am geeignetsten ist. Aus dem erforderlichen Druckgefälle $-\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$, der Durchflußmenge Q, der Zähigkeit μ und dem Umfang s des Rohrquerschnitts, der den benötigten Materialaufwand kennzeichnen soll, kann man hierfür die folgende Dimensionslose bilden:

$$\Theta = \frac{\mu Q}{(-\mathrm{d}p/\mathrm{d}x)\, s^4}. \tag{3.39}$$

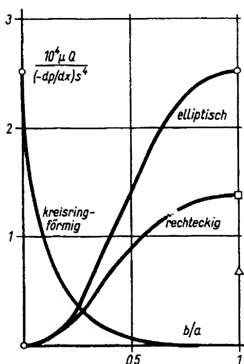


Fig. 70.
Laminare Strömung durch Rohre verschiedenen Querschnitts (Abhängigkeit der Durchflußmenge von der Querschnittsform)

In den folgenden Beispielen erhält man den größten Θ-Wert für das Kreisrohr, das sich somit als günstigstes Rohr ergibt, wie zu erwarten war (vgl. Fig. 70).

Beispiele

1. Elliptischer Querschnitt (Halbachsen a und b in y- und z-Richtung).

$$u = \frac{(-\mathrm{d}p/\mathrm{d}x)}{2\mu} \frac{a^2 b^2}{a^2+b^2}\left(1-\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}\right), \quad Q = \frac{-\mathrm{d}p/\mathrm{d}x}{4\mu}\frac{\pi a^3 b^3}{a^2+b^2}.$$

Umfang $s = 4aE\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1-b^2/a^2}\right)$; ($E$ = elliptisches Integral 2. Gattung).

Speziell für das Kreisrohr wird $\Theta = \frac{1}{128\pi^3} = 2{,}52 \cdot 10^{-4}$.

2. Rechteckiger Querschnitt (Seitenlängen $2a$ und $2b$ in y- und z-Richtung).

$$u = \frac{(-\mathrm{d}p/\mathrm{d}x)}{2\mu}\left\{b^2 - z^2 - \frac{32}{\pi^3} b^2 \left[\frac{\cosh(\pi y/2b)}{\cosh(\pi a/2b)}\cos(\pi z/2b) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{3^3}\frac{\cosh(3\pi y/2b)}{\cosh(3\pi a/2b)}\cos(3\pi z/2b) + \ldots\right]\right\}$$

$$Q = \frac{4}{3}\frac{(-\mathrm{d}p/\mathrm{d}x)\, a b^3}{\mu}\left\{1 - \frac{192}{\pi^5}\frac{b}{a}\left[\tanh\left(\frac{\pi a}{2b}\right) + \frac{1}{3^5}\tanh\left(\frac{3\pi a}{2b}\right)\ldots\right]\right\}$$
$$s = 4(a+b).$$

Speziell für den quadratischen Querschnitt wird $\Theta = 1{,}37 \cdot 10^{-4}$.

3. Gleichseitiges Dreieck als Querschnitt (Seitenlänge $2\sqrt{3}\,a$)

$$u = \frac{(-\mathrm{d}p/\mathrm{d}x)}{12\mu a} - (a-y)\,[(y+2a)^2 - 3z^2]$$

$$Q = \frac{1{,}35}{\sqrt{3}}\frac{(-\mathrm{d}p/\mathrm{d}x)\, a^4}{\mu}, \quad s = 6\sqrt{3}\,a \quad \text{und} \quad \Theta = 0{,}668 \cdot 10^{-4}.$$

4. Kreisring als Rohrquerschnitt (Radien a und b).

$$u = \frac{(-\mathrm{d}p/\mathrm{d}x)}{4\mu}\left\{a^2 - r^2 + \frac{b^2-a^2}{\ln b/a}\ln\frac{r}{a}\right\}$$

$$Q = \frac{\pi}{8}\frac{(-\mathrm{d}p/\mathrm{d}x)}{\mu}\left\{b^4 - a^4 - \frac{(b^2-a^2)^2}{\ln b/a}\right\}, \quad s = 2\pi(a+b).$$

In einem Rohr verringert also z. B. ein Draht in der Rohrachse mit einem Durchmesser von nur 1/20 des Rohrdurchmessers die Durchflußmenge bereits um ein Drittel (für $a/b = 1/20$ wird nämlich $Q = 0{,}668\, Q\, (a = 0)$).

3.3.2. Abklingen eines Wirbels. Ein lehrreiches Beispiel einer exakt berechenbaren instationären Strömung ist die ebene Bewegung einer unbegrenzten zähen Flüssigkeit, bei der alle Bahnlinien Kreise um einen Punkt $r = 0$ bilden. Hier ist die Kontinuitätsbedingung offenbar von selbst erfüllt. Die Navier-

Stokessche Gleichung, die im Anhang für Zylinderkoordinaten umgeschrieben ist, vereinfacht sich hier zu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right), \tag{3.40}$$

wo $u(r,t)$ die Geschwindigkeit eines Teilchens auf seiner Kreisbahn (Radius r) zur Zeit t bedeutet. Die Rotation der Geschwindigkeit hat nur eine Komponente senkrecht zur Strömungsebene vom Betrag

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u); \tag{3.41}$$

aus der Navier-Stokesschen Gleichung folgt

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right). \tag{3.42}$$

Zur Berechnung von u oder ω aus diesen Gleichungen müßte natürlich noch eine Anfangsverteilung bekannt sein, durch die die Strömung erst eindeutig bestimmt wäre.

Ein physikalisch besonders wesentlicher Spezialfall dieser Wirbelströmungen in unbegrenzter Flüssigkeit wird nun durch eine dimensionslose Lösung beschrieben, die keine willkürlich eingeführten Maßstäbe für Länge und Zeit (r und t) enthält. Zusammen mit der einzigen Materialkonstante ν des Problems läßt sich nämlich aus r und t nur eine dimensionslose Variable η folgender Form bilden:

$$\eta = \frac{r}{2\sqrt{\nu t}}. \tag{3.43}$$

(Das Einführen der willkürlichen Zahl 2 ist rechentechnisch zweckmäßig.)

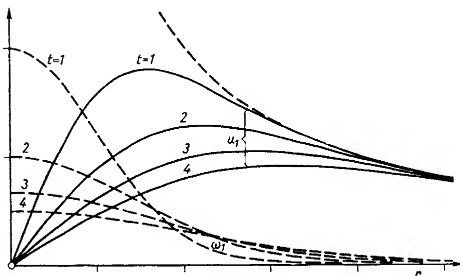


Fig. 71. Zeitliches Abklingen eines Wirbels mit $\Gamma_1(r \to \infty, t) = \text{const} \neq 0$

Da die Rotation ω die Dimension 1/Zeit hat, ist es naheliegend, eine dimensionslose Rotation $\Omega = \omega \cdot t$ einzuführen und weiterhin anzunehmen, daß diese nur noch von η abhängen soll: $\Omega = \Omega(\eta)$.

Unter diesen Voraussetzungen wird nun:

$$\frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{1}{2\sqrt{\nu t}} \qquad \text{sowie} \qquad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{r}{4\sqrt{\nu t^3}}$$

und $$\frac{\partial \omega}{\partial r} = \frac{1}{t}\frac{1}{2\sqrt{\nu t}}\Omega', \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{1}{t^2}\Omega - \frac{1}{t}\frac{r}{4\sqrt{\nu t^3}}\Omega' = -\frac{1}{t^2}\left(\Omega + \frac{\eta}{2}\Omega'\right).$$

Gl. (3.42) ergibt dann

$$\eta\Omega'' + (1 + 2\eta^2)\Omega' + 4\eta\Omega = 0$$

mit der speziellen Lösung

$$\Omega = c_1 e^{-\eta^2} \qquad \text{oder} \qquad \omega_1 = \frac{c_1}{t} e^{-r^2/4\nu t}. \tag{3.44}$$

Die zugehörige Geschwindigkeitsverteilung folgt aus Gl. (3.41); bestimmt man dabei die Integrationskonstante so, daß die Geschwindigkeit u auch noch im Nullpunkt $r = 0$ endlich bleibt, so wird (vgl. Fig. 71)

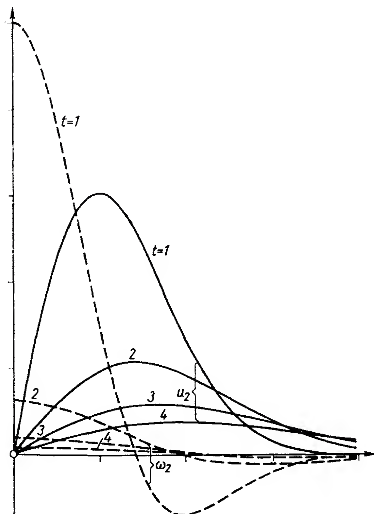


Fig. 72.
Zeitliches Abklingen eines Wirbels mit $\Gamma_2(r \to \infty, t) = 0$

$$u_1 = \frac{2c_1\nu}{r}\left(1 - e^{-r^2/4\nu t}\right). \tag{3.45}$$

Da die Differentialgleichungen (3.41) und (3.42) linear in u, ω und t sind, so stellen auch zeitliche Ableitungen (und lineare Kombinationen davon) von ω_1, u_1 nach t weitere Lösungen dar. So wird z. B.

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} \sim \omega_2 = \frac{c_2}{t^2} \times \left(1 - \frac{r^2}{4\nu t}\right) e^{-r^2/4\nu t} \tag{3.46}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} \sim u_2 = \frac{c_2 r}{2t^2} e^{-r^2/4\nu t}. \tag{3.47}$$

(Während c_1 eine dimensionslose Zahl ist, entsprechend dem Ansatz für Ω, ist jetzt c_2 eine Konstante mit der Dimension einer Zeit.)

Für diese Lösung sind $\omega(r)$ und $u(r)$ zu verschiedenen Zeiten t in Fig. 72 aufgetragen.

Die erste Lösung kann man als das zeitliche Abklingen eines Potentialwirbels infolge der Zähigkeitswirkung deuten. Für $t \to 0$ wird nämlich für $r > 0$, $\omega_1 \to 0$ und $u_1 \to 2c_1\nu/r$; das ist aber das Geschwindigkeitsfeld eines Potentialwirbels mit der Zirkulation $\Gamma_1 = 4\pi c_1 \nu$. Für $t > 0$ ist die Singularität bei $r = 0$ verschwunden, der Wirbel hat einen endlichen Kern mit linearem Geschwindigkeitsanstieg, wie eine Reihenentwicklung für $r^2 \ll 4\nu t$ zeigt:

$$\omega_1 = \frac{c_1}{t}\left(1 - \frac{r^2}{4\nu t} + - \ldots\right), \quad u_1 = \frac{c_1}{2t}\left(r - \frac{r^2}{8\nu t} + - \ldots\right).$$

Im Kern ist die Rotation fast konstant und fällt nach außen monoton ab; für $r^2/4\nu t \approx 2$ oder 3 ist die Strömung praktisch drehungsfrei: $\omega_1 \approx 0$, $u_1 \sim 1/r$. Das Gebiet mit drehender Flüssigkeit ($\omega_1 \neq 0$), das bei $t \to 0$ auf eine kleine Umgebung von $r = 0$ beschränkt ist, breitet sich mit der Zeit mehr und mehr aus, wobei gleichzeitig der Betrag von ω schnell abklingt. Die Zirkulation Γ_1 längs eines großen Kreises mit $r^2 \gg 4\nu t$ bleibt aber zeitlich konstant, da

$$\Gamma_1 = 2\pi r u_1 = 4\pi c_1 \nu. \tag{3.48}$$

Die Zähigkeit bewirkt also eine Wirbeldiffusion oder Verschmierung des ursprünglich linienförmigen Wirbelfadens bei $r = 0$. Der zeitlichen Abnahme der kinetischen Energie des ganzen Strömungsfeldes entspricht dabei die Dissipation

$$D_1 = \mu \int_0^\infty \omega^2\, 2\pi r\, \mathrm{d}r = \frac{\varrho \Gamma_1^2}{8\pi t} \sim \frac{1}{t}. \tag{3.49}$$

Die zweite Lösung gibt das Abklingen eines Wirbels mit einer anderen, räumlich schneller abklingenden Anfangsverteilung der Geschwindigkeit. Die Rotation ω_2 wechselt bei $r^2 = 4\nu t$ das Vorzeichen, wenn auch u_2 für alle r die gleiche Drehrichtung hat. Die Rotation ist so verteilt, daß im großen Abstand vom Wirbel die Zirkulation stets verschwindet:

$$\Gamma_2 = \frac{\pi c_2 r^2}{t^2}\, \mathrm{e}^{-r^2/4\nu t} \to 0 \quad \text{für} \quad r^2 \gg 4\nu t. \tag{3.50}$$

Die Wirbeldiffusion spielt sich hier schneller ab als bei der ersten Lösung, was auch einer schnelleren Dissipation entspricht:

$$D_2 = \pi \varrho c_2^2 \frac{\nu^2}{t^3} \sim \frac{1}{t^3}. \tag{3.51}$$

3.3.3. Die ruckartig beschleunigte Platte. Nachdem gezeigt wurde, wie im Innern einer zähen Flüssigkeit Wirbel diffundiert und aufgelöst werden, soll nun das Entstehen von Rotation in der Nähe einer festen Wand an einem einfachen Grundbeispiel untersucht werden. Eine unendlich lange Platte in einer unbegrenzten ruhenden Flüssigkeit werde zur Zeit $t = 0$ ruckartig aus der Ruhe so beschleunigt, daß sie sich für alle $t > 0$ mit konstanter Geschwindigkeit U in ihrer eigenen Ebene bewegt. In reibungsloser Flüssigkeit würde dadurch überhaupt keine Strömung erzeugt. Die zähe Flüssigkeit haftet jedoch an der Wand ($y = 0$), und es entsteht eine Strömung parallel zur Platte mit $u(y,t)$ und $v = w = 0$ und den Randbedingungen

$$t > 0: \quad y = 0 \quad u = U, \quad y \to \infty \quad u \to 0.$$

Offenbar ist der Druck überall gleich und die Navier-Stokessche Gleichung reduziert sich auf

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{3.52}$$

Da auch dieses Problem keine charakteristische Länge enthält, führt man wieder einen dimensionslosen Wandabstand η ein:

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}},$$

und erwartet eine Lösung von der Form $\frac{u}{U} = f(\eta)$.

Tatsächlich ergibt sich aus (3.52) die gewöhnliche Differentialgleichung

$$f'' + 2\eta f' = 0 \tag{3.53}$$

mit der Lösung

$$\frac{u}{U} = f = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta. \tag{3.54}$$

(Das letzte Integral ist das Gaußsche Fehlerintegral.) Fig. 73 zeigt dieses Geschwindigkeitsprofil über dem Wandabstand.

Fig. 73. Geschwindigkeitsprofil an der ruckartig beschleunigten Platte

Die Rotation ist schließlich

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{U}{\sqrt{\pi \nu t}} e^{-\eta^2}, \tag{3.55}$$

und die Schubspannung an der Wand

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\varrho U}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\nu}{t}}. \tag{3.56}$$

Die Arbeit $\tau_0 U$, die in der Zeiteinheit an der Flächeneinheit der Platte zu leisten ist, um diese Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit aufrecht zu erhalten, nimmt also ebenso wie die Dissipation mit $1/\sqrt{t}$ ab. Es wird zunächst nur eine wandnahe Schicht der Flüssigkeit mitgerissen, deren Dicke mit der Zeit anwächst; je mehr Flüssigkeit bereits in Bewegung versetzt worden ist, um so geringer wird der Reibungswiderstand der Platte. Als Dicke δ der mitbewegten Flüssigkeitsschicht kann man etwa den Wandabstand definieren, in dem $u/U = 0{,}01$ gilt. Das ist bei $\eta = \delta/2\sqrt{\nu t} \approx 2$ der Fall, so daß

$$\delta \approx 4\sqrt{\nu t}. \tag{3.57}$$

Die bewegte Wand beeinflußt die Flüssigkeit also in einer wandnahen Schicht, deren Dicke proportional der Wurzel aus der Zeit und aus der Zähigkeit ist.

Das Integral $$I = \int\limits_0^\infty \omega \, \mathrm{d}y = -\frac{U}{\sqrt{\pi \nu t}} \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-\eta^2} \, 2\sqrt{\nu t} \, \mathrm{d}\eta = -U \tag{3.58}$$

hängt nicht von der Zeit ab. Das heißt: die gesamte Rotation, die durch das Anfahren der Platte zur Zeit $t = 0$ entstanden ist und die zuerst in einer unendlich dünnen Wirbelschicht längs der Platte konzentriert ist, diffundiert dann in die Flüssigkeit hinein, ohne daß ihr Gesamtbetrag verändert wird. Im zugehörigen Wärmeleitungsproblem entspricht ω der Temperatur und I der gesamten Wärmemenge (je Flächeneinheit), die zur Zeit $t = 0$ der Platte zugeführt worden ist und dann in die Flüssigkeit geleitet wird.

3.3.4. Schwingende Platte. In der Theorie der Wärmeleitung sind weitere Lösungen der Gl. (3.52) bekannt, insbesondere auch die periodische Lösung

$$u = U\,\mathrm{e}^{-ky} \cos(nt - ky),$$

mit $$k = \sqrt{n/2\nu}. \tag{3.59}$$

In großen Wandabständen bleibt dann die Flüssigkeit immer in Ruhe ($u \to 0$ für $y \to \infty$), an der Wand selbst wird $u = U \cos nt$ für $y = 0$; die Platte schwingt also harmonisch in ihrer Ebene. Die Flüssigkeitsteilchen schwingen dann ebenfalls hin und her, und zwar mit um so kleinerer Amplitude und größerer Phasenverzögerung, je größer der Wandabstand ist, wie in Fig. 74 gezeigt. Teilchen gleicher Phasen unterscheiden sich im Wandabstand um $\Delta y = 2\pi/k = 2\pi\sqrt{2\nu/n}$. Diese Länge kann auch als Eindringungstiefe der Schwingung in die Flüssigkeit aufgefaßt werden; denn im Wandabstand $y = 2\pi/k$ ist die Amplitude von u nur noch $U\mathrm{e}^{-2\pi} = 0{,}002\,U$. Die Lösung stellt auch die Temperaturverteilung im Erdinnern dar, wenn die Temperatur (u, U) an der Oberfläche periodisch (täglich oder jährlich) schwankt.

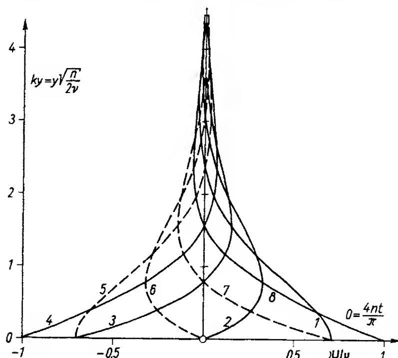


Fig. 74. Geschwindigkeitsprofile an einer dauernd hin- und herschwingenden Platte

Wegen der Linearität der Gl. (3.52) kann man aus dieser Grundlösung – mittels eines Fourier-Integrals – auch die Lösung für beliebige Plattenbewegungen zusammensetzen.

3.3.5. Ebene Staupunktströmung. Die ebene Staupunktströmung einer idealen Flüssigkeit ergab sich in 2.2.2 aus der komplexen Strömungsfunktion $F = az^2/2$, $u - \mathrm{i}v = \mathrm{d}F/\mathrm{d}z = az = ax + \mathrm{i}ay$. Dadurch wird in der Umgebung des Staupunkts $x = y = 0$ eine Strömung $u = ax$, $v = -ay$ gegen die Ebene $y = 0$ dargestellt (vgl. Fig. 18, S. 65); der Druck ist nach Bernoulli

$$p = p_0 - \frac{\varrho}{2} a^2 (x^2 + y^2) \quad \text{mit } p_0 = \text{Druck im Staupunkt.}$$

Um die entsprechende Strömung in zäher Flüssigkeit zu finden, in der an der Wand nicht nur

$$v = 0 \quad \text{für} \quad y = 0, \quad \text{sondern auch} \quad u = 0$$

gelten muß, kann man versuchen, die obigen Beziehungen folgendermaßen zu verallgemeinern:

$$u = x \cdot f'(y), \; v = -f(y) \tag{3.60}$$

und

$$p = p_0 - \frac{\varrho}{2} a^2 [x^2 + g(y)]. \tag{3,61}$$

Der Ansatz für u und v befriedigt die Kontinuitätsbedingung, und die Randbedingungen an der Wand sind jetzt

$$y = 0 \quad u = v = 0 \quad \text{also} \quad f' = f = 0.$$

Ähnlich wie bei den vorigen Beispielen erwartet man, daß der Einfluß der Zähigkeit und der Haftbedingung in größeren Wandabständen vernachlässigbar sein wird, so daß dort die Strömung ebenso verläuft wie in reibungsloser Flüssigkeit, d. h. daß für

$$y \to \infty \quad u \to ax \quad \text{oder} \quad f' \to a.$$

Mit diesen Ansätzen erhält man nun aus den Navier-Stokesschen Gleichungen

$$f'^2 - ff'' = a^2 + \nu f''' \tag{3.62}$$

und

$$ff' = \frac{a^2}{2} g' - \nu f''. \tag{3.63}$$

Es ergeben sich also in der Tat wie gewünscht zwei gewöhnliche Differentialgleichungen für die beiden Funktionen f und g. Aus der ersten kann $f(y)$ bestimmt werden und daraus das Geschwindigkeitsfeld. Aus der zweiten Gleichung folgt dann $g(y)$ und daraus der Druck; sie ersetzt also die nur für ideale Flüssigkeiten gültige Bernoulli-Gleichung.

Im Gegensatz zu den vorherigen Beispielen verschwinden hier nicht alle konvektiven Beschleunigungsglieder, weshalb die obige Gleichung für f nicht linear ist. Zu ihrer numerischen Lösung werden dimensionslose Größen eingeführt:

$$\eta = y \sqrt{\frac{a}{\nu}} \quad \text{und} \quad f(y) = \sqrt{a\nu}\, \Phi(\eta). \tag{3.64}$$

Für $\Phi(\eta)$ ergibt dann Gl. (3.62):

$$\Phi''' + \Phi\Phi'' - \Phi'^2 + 1 = 0 \tag{3.65}$$

mit

$$\Phi = \Phi' = 0 \quad \text{für} \quad \eta = 0 \quad \text{und} \quad \Phi' = 1 \quad \text{für} \quad \eta \to \infty.$$

Bezieht man die Geschwindigkeit u parallel zur Wand auf die in idealer Flüssigkeit $u_{id} = ax$, so wird

$$\frac{u}{u_{id}} = \frac{xf'}{ax} = \Phi'(\eta). \tag{3.66}$$

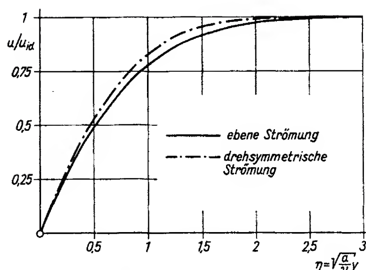


Fig. 75. Staupunktströmung: Geschwindigkeit parallel zur Wand über dem Wandabstand

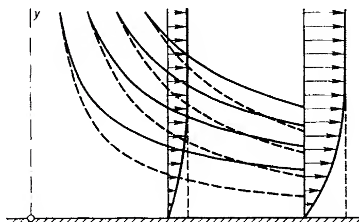


Fig. 76. Ebene Staupunktströmung in zäher und in idealer (– – –) Flüssigkeit

Die Lösung hierfür ist in Fig. 75 aufgetragen (nach K. Hiemenz, 1911). Etwa bei $\eta = 2{,}4$ wird $\Phi' = 0{,}99$; von dort ab unterscheidet sich u um weniger als 1% von u_{id}. Die Zähigkeit beeinflußt die Strömung also nur in einer wandnahen Schicht von der Dicke $\delta = 2{,}4\sqrt{\nu/a}$, die um so dünner wird, je weniger zäh die Flüssigkeit ist. Der Vergleich der Stromlinien in idealer und in zäher Flüssigkeit in Fig. 76 zeigt, wie die Strömung infolge dieser Schicht von der Wand weg gedrängt wird. Soweit man einen Körper mit stumpfen Kopf durch die Tangentialebene im Staupunkt ersetzen kann, gilt diese Staupunktströmung dort allgemein.

Eine analoge Rechnung für die drehsymmetrische Staupunktsrechnung gibt das in Fig. 75 gestrichelt eingetragene Geschwindigkeitsprofil $\Phi' = u/u_{id}$ (mit $u_{id} = a\,r$) über dem dimensionslosen Wandabstand.

3.4. Schleichende Strömungen

Außer den obigen Beispielen sind durchaus noch weitere exakte Lösungen der Navier-Stokes-Gleichung bekannt, aber es sind stets Einzelfälle mit einfachem Stromlinienverlauf. Allgemeinere Methoden für Näherungslösungen sind jedoch möglich in den Grenzfällen sehr kleiner oder sehr großer Re-Zahlen. Im Fall $Re \ll 1$ (oder wenigstens $Re < 1$) überwiegen die Zähigkeitskräfte diejenigen der Trägheit, und die Grundgleichung kann näherungsweise linearisiert werden; kleine Körper, die sich langsam in zäher Flüssigkeit bewegen, bewirken solche schleichenden Strömungen. Im praktisch wichtigeren Fall der Strömungen von Flüssigkeiten sehr kleiner Zähigkeit, $Re \to \infty$, genügt es oft, den Zähigkeitseinfluß nur in einer dünnen Grenzschicht an einer Wand oder einem schlanken Körper zu berücksichtigen, so daß die Berechnung in anderer Weise vereinfacht werden kann.

Wir betrachten nun stationäre, schleichende Strömungen und gehen von der Wirbelgleichung (3.32) für $\boldsymbol{w} = \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ aus:

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \operatorname{grad}) \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{w} \operatorname{grad}) \boldsymbol{v} - \nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{w}, \text{ mit } \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0.$$

Speziell für zweidimensionale stationäre Strömungen, die entweder eben oder drehsymmetrisch sind, gilt stets $\boldsymbol{w} \perp \boldsymbol{v}$ und folglich $(\boldsymbol{w} \operatorname{grad}) \boldsymbol{v} = 0$, so daß dann

$$(\boldsymbol{v} \operatorname{grad}) \boldsymbol{w} = -\nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{w}. \tag{3.67}$$

Ferner beschränken wir uns auf das Problem, daß ein Körper (charakteristische Abmessung L) sich in einer unbeschränkten Parallelströmung (U) befindet. Wenn man die Koordinaten mit L und $\boldsymbol{v}$ mit U dimensionslos macht, ist statt ν dann $1/Re$ zu schreiben mit $Re = UL/\nu$. Gl. (3.67) kann man nun auf zwei Weisen linearisieren, indem man im Trägheitsterm der linken Seite entweder $\boldsymbol{v} = 0$ oder $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} U$ setzt. Die erste Näherung führte G. G. Stokes 1851 durch; das Trägheitsglied bzw. der Wirbeltransport wird dabei völlig vernachlässigt, nur die Wirbeldiffusion infolge der Zähigkeit wird berücksichtigt. Die Lösung für das Wirbelfeld $\boldsymbol{w}$ bzw. für das zugehörige Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{v}$ wird dann ganz unabhängig von Re, sie ist aber natürlich physikalisch nur für $Re \ll 1$ sinnvoll. Die Näherung $\boldsymbol{v} = 0$ auf der linken Gleichungsseite trifft exakt allerdings nur am Körper selbst zu, sonst aber nirgends im Strömungsfeld.

Die andere Linearisierungsannahme $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} U$ schlug C. W. Oseen 1911 vor. Außer der Wirbeldiffusion wird hier der Wirbeltransport näherungsweise wenigstens in großer Entfernung vom Körper richtig berücksichtigt. Da die Re-Zahl des Körpers Parameter der Gl. (3.67) bleibt, hängt deren Lösung von Re ab, und es ist zu erwarten, daß sie für $Re \to 0$ zur Stokesschen Lösung konvergiert, da dann auch die beiden Annahmen über $\boldsymbol{v}$ für $U \to 0$ zusammenfallen.

3.4.1. Kugelumströmung nach Stokes. Das einfachste Beispiel einer Strömung für $Re \ll 1$ nach Stokes ist die um eine Kugel. Führt man Kugelkoordinaten R, Θ und Φ ein, wobei hier wegen der Drehsymmetrie um die Achse $\partial/\partial\Phi = 0$ gilt, so wird (vgl. Anhang)

$$\boldsymbol{w} = \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R v_\Theta) - \frac{1}{R} \frac{\partial v_R}{\partial \Theta}\right) \boldsymbol{k} \tag{3.68}$$

und bei Einführung einer Stromfunktion $\Psi(R, \Theta)$:

$$v_R = \frac{1}{R^2 \sin\Theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} \quad \text{und} \quad v_\Theta = -\frac{1}{R \sin\Theta} \frac{\partial \Psi}{\partial R}. \tag{3.69}$$

Somit wird

$$\boldsymbol{w} = \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = -\frac{\boldsymbol{k}}{R \sin\Theta} \Delta\Psi, \quad \text{mit} \quad \Delta\Psi = \Psi_{RR} + \frac{\sin\Theta}{R^2} \frac{\partial}{\partial\Theta} \left(\frac{\Psi_\Theta}{\sin\Theta}\right), \tag{3.70}$$

und nach Gl. (3.67)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{k}}{R \sin\Theta} \Delta\Delta\Psi = 0. \tag{3.71}$$

Die Stromfunktion Ψ muß also die Bipotentialgleichung erfüllen sowie die Randbedingungen

für $R = R_0 =$ Kugelradius: $\Psi_R = \Psi_\Theta = 0$

und für
$$R \to \infty \quad \Psi \to \frac{U}{2} R^2 \sin^2 \Theta . \tag{3.72}$$

(Denn wenn man den Achsabstand $R \sin \Theta = r$ nennt, so soll ja im Unendlichen parallel zur Achse die Geschwindigkeit $(1/r)\partial\Psi/\partial r = U$ gelten.) Für ideale Flüssigkeit ergibt die Potentialströmung (mit rot $\boldsymbol{v} = 0$ und $\Delta\Psi = 0$, S. 105):

$$\Psi_{\text{Pot}} = \frac{U}{2} R^2 \sin^2 \Theta \left(1 - \frac{R_0^3}{R^3}\right) ; \tag{3.73}$$

hierbei kann auf der Kugel nur die Randbedingung $\Psi_\Theta = 0$ oder $v_R = 0$ erfüllt werden, nicht aber außerdem noch die Haftbedingung $v_\Theta(R = R_0) = 0$.

Setzt man nun für die schleichende Bewegung ebenfalls an

$$\Psi = \sin^2 \Theta f(R), \tag{3.74}$$

so gibt Gl. (3.71) für f die gewöhnliche Differentialgleichung

$$f^{\text{IV}} - \frac{4}{R^2} f'' + \frac{8}{R^3} f' - \frac{8}{R^4} f = 0 , \tag{3.75}$$

mit der Lösung

$$f = \frac{a}{R} + bR + cR^2 + dR^4 . \tag{3.76}$$

Die Randbedingung für $R \to \infty$ bestimmt die Konstanten c und d:

$$c = \frac{U}{2} \quad \text{und} \quad d = 0 ,$$

während a und b so gewählt werden können, daß für $R = R_0$ sowohl $v_R = 0$ wie auch $v_\Theta = 0$ wird. Dann erhält man schließlich die Lösung

$$\Psi = \frac{U}{2} R^2 \sin^2 \Theta \left(1 - \frac{3}{2} \frac{R_0}{R} + \frac{1}{2} \frac{R_0^3}{R^3}\right) . \tag{3.77}$$

Daraus folgt die Rotation

$$\boldsymbol{w} = - \frac{\boldsymbol{k}}{R \sin \Theta} \Delta\Psi = - \boldsymbol{k} \cdot \frac{3}{2} U \frac{R_0}{R^2} \sin \Theta . \tag{3.78}$$

Im ganzen Strömungsgebiet wird nach Gl. (3.21) die Energie D je Zeiteinheit dissipiert:

$$D = \int \mu \, \boldsymbol{w}^2 \, \mathrm{d}V ,$$

mit dem Volumenelement

$$\mathrm{d}V = 2\pi R \sin \Theta \cdot R \, \mathrm{d}\Theta \, \mathrm{d}R \quad \text{und} \quad R_0 \leqslant R < \infty , \; 0 \leqslant \Theta \leqslant \pi .$$

Dieser Dissipation entspricht die Arbeit des Widerstandes W je Zeiteinheit: $D = W \cdot U$, und die Integration ergibt hierfür

$$W = 6\pi\mu U R_0, \tag{3.79}$$

oder für den Widerstandsbeiwert c_W:

$$c_W = \frac{W}{\frac{\varrho}{2} U^2 \cdot \pi R_0^2} = \frac{12\mu}{\varrho U R_0} = \frac{24}{Re}, \quad \text{mit} \quad Re = 2 R_0 \frac{U}{\nu}. \tag{3.80}$$

Das Druckfeld kann man aus der Navier-Stokes-Gleichung bei Vernachlässigung der Trägheitsfelder ermitteln:

$$0 = -\frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p - \nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{v}.$$

Es wird hier

$$-p + p_\infty = \frac{3}{2} \mu U \cos\Theta \frac{R_0}{R^2}. \tag{3.81}$$

Der Kugelwiderstand läßt sich auch als Resultierende der Normaldrucke und der tangentialen Wandschubspannungen an der Kugel berechnen. Man erhält denselben Wert wie oben und die zusätzliche Aussage, daß 1/3 des Gesamtwiderstands vom Druckfeld herrührt.

Die obige Formel (3.79) von Stokes für den Kugelwiderstand ist experimentell für $Re <$ etwa 1 bestätigt worden. Andererseits wurde sie von R. A. Millikan bei der Bestimmung der elektrischen Elementarladung auf winzige, elektrisch geladene Öltröpfchen angewandt, die in Luft zwischen den Platten eines Kondensators schwebten.

Mit größerem mathematischen Aufwand können nach der Stokesschen Methode auch andere Körperumströmungen berechnet werden. So ist z. B. nach A. Oberbeck (1876) der Widerstand einer senkrecht angeströmten Kreisscheibe

$$W = 16\mu U R_0, \tag{3.82}$$

was experimentell ebenfalls bis $Re < 1$ bestätigt wird.

Merkwürdigerweise ist es jedoch nicht möglich ebene Strömungen nach der Stokesschen Methode zu berechnen. So müßte man z. B. für den querangeströmten Kreiszylinder eine Stromfunktion Ψ finden, die außer der Gleichung $\Delta\Delta\Psi = 0$ die Randbedingungen $\Psi_\vartheta = 0$ und $\Psi_r = 0$ am Zylinder $r = r_0$ und $\Psi \to U r \sin\vartheta$ für $r \to \infty$ erfüllt. In Polarkoordinaten r und ϑ ist dabei

$$\Delta\Psi = \Psi_{rr} + \frac{1}{r}\Psi_r + \frac{1}{r^2}\Psi_{\vartheta\vartheta}. \tag{3.83}$$

Macht man analog zur Lösung der Potentialströmung

$$\Psi_{\text{Pot}} = U r \sin\vartheta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \tag{3.84}$$

den Separationsansatz $\Psi = \sin\vartheta f(r)$, so ergibt sich

$$f^{IV} + \frac{2}{r} f''' - \frac{3}{r^2} f'' + \frac{3}{r^3} f' - \frac{3}{r^4} f = 0 \tag{3.85}$$

mit der Lösung
$$f = \frac{a}{r} + br + cr^3 + dr \ln r. \tag{3.86}$$

Anders als bei Kugelströmung legt hier die Randbedingung im Unendlichen bereits drei Konstanten fest: $b = U$, $c = 0$ und $d = 0$, so daß am Zylinder selbst nur noch eine Randbedingung (und nicht zwei) erfüllt werden kann. Es kann ferner gezeigt werden, daß auch mit allgemeineren Ansätzen für Ψ keine Lösung dieses Randwertproblems zu finden ist.

Das vollständige Vernachlässigen der Trägheitsglieder führt somit bei ebener Strömung auf eine Randwertaufgabe, die mathematisch keine sinnvolle stetige Lösung besitzt. Aber auch bei räumlicher Strömung, wie z. B. um eine Kugel, ist es eigentlich ein glücklicher Zufall, daß sich eine Lösung ergibt, die – wenigstens hinsichtlich des Widerstands – die Wirklichkeit gut beschreibt. Die Stokessche Lösung erfüllt nämlich in größerer Entfernung von der Kugel gar nicht die physikalische Voraussetzung, daß die Trägheitsglieder gegen die Druck- und Zähigkeitskräfte klein sein sollen. Denn nach den obigen Ergebnissen sind die ersteren von der Größenordnung $\varrho \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \sim \varrho U \cdot U R_0/R^2$, die letzteren dagegen: grad p oder μ rot $\boldsymbol{w} \sim \mu U R_0/R^3$; ihr Verhältnis hat also die Größenordnung $UR/\nu = UR_0/\nu \cdot R/R_0$ und wird für $R/R_0 \to \infty$ beliebig groß, auch wenn $Re = 2UR_0/\nu$ eine beliebig kleine, feste Zahl ist. Nach der Stokesschen Methode erhält man für räumliche Strömungen Lösungen, die zwar das Geschwindigkeitsfeld der eigentlich gesuchten, exakten Lösung der Navier-Stokes-Gleichung für $Re \to 0$ beliebig genau annähert, nicht aber das Feld der Geschwindigkeitsgradienten, insbesondere der Rotation, in großer Entfernung vom Körper. Deshalb kann man diese Lösung auch nicht als Ausgangsnäherung für eine iterative Berechnung der bisher vernachlässigten Trägheitsglieder und eine darauffolgende Korrektur der Ausgangslösung nach der vervollständigten Wirbelgleichung benutzen.

3.4.2. Die Methode von Oseen. Bei dem Linearisierungsvorschlag $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}U$ von Oseen wird die wahre Strömung um so besser dargestellt, je größer die Entfernung vom Körper ist. Der Fehler, der dabei in Körpernähe bewußt gemacht wird, fällt deshalb nicht so stark ins Gewicht, weil es hier vor allem auf das Gleichgewicht zwischen den in Körpernähe großen Druck- und Zähigkeitskräften ankommt; die Trägheitsglieder sind dort klein dagegen, da sie in dimensionsloser Schreibweise überall den Faktor Re enthalten, von dem sowieso $Re \ll 1$ vorausgesetzt wird.

Die so linearisierte Navier-Stokes-Gleichung lautet nun

$$(\boldsymbol{v}\,\mathrm{grad})\,\boldsymbol{v} \approx U \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} = -\frac{1}{\varrho}\,\mathrm{grad}\, p - \nu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}\,, \tag{3.87}$$

woraus wegen div $\boldsymbol{v} = 0$ wieder folgt: $\Delta p = 0$.

Nach **Lamb** ist es rechnerisch zweckmäßig, vom Geschwindigkeitsfeld dasjenige einer Potentialströmung abzuspalten, das mit dem Druckfeld im Gleichgewicht steht:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}U + \operatorname{grad}\Phi + \boldsymbol{v}' \qquad (3.88)$$

mit $\Delta\Phi = 0$, $\operatorname{div}\boldsymbol{v}' = 0$ und $\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \operatorname{rot}\boldsymbol{v}'$.

Für den ersten Teil dieser Zerlegung von $\boldsymbol{v}$ folgt aus (3.87)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{p}{\varrho U} + \text{const}. \qquad (3.89)$$

Der zweite Teil wird durch den Ansatz befriedigt:

$$\boldsymbol{v}' = \operatorname{grad}\chi - \boldsymbol{i}\frac{U\chi}{\nu}; \qquad (3.90)$$

setzt man ihn nämlich in Gl. (3.87) ein, so ergibt sich für die skalare Ortsfunktion $\chi(x,y,z)$ dieselbe Gleichung, die auch die Forderung $\operatorname{div}\boldsymbol{v}' = 0$ ergibt:

$$\Delta\chi - \frac{U}{\nu}\frac{\partial\chi}{\partial x} = 0. \qquad (3.91)$$

Führt man nun hier dimensionslose Koordinaten so ein, daß

$$\xi = \frac{Ux}{\nu}, \quad \eta = \frac{Uy}{\nu} \quad \text{und} \quad \zeta = \frac{Uz}{\nu} \qquad (3.92)$$

und schreibt man

$$\chi = UR_0 \cdot f(\xi, \eta, \zeta), \qquad (3.93)$$

da χ die Dimension Länge²/Zeit hat, so wird

$$\Delta f = \frac{\partial}{\partial\xi} f. \qquad (3.94)$$

Lösungen dieser Gleichung, die um die ξ-Achse rotationssymmetrisch und zur Darstellung der Kugelumströmung (Radius R_0) geeignet sind, lauten:

$$f = e^{\xi/2}\left(\alpha_0 \frac{1}{r} e^{-r/2} + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{r} e^{-r/2} + \ldots\right), \qquad (3.95)$$

mit

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = \frac{UR}{\nu}. \qquad (3.96)$$

Für den Potentialanteil $\operatorname{grad}\Phi$ der Geschwindigkeit, der mit dem ebenfalls nach außen abklingenden Druckfeld durch Gl. (3.89) verknüpft ist, kommt hier nur folgende Reihe in Betracht:

$$\Phi = UR_0\left(\frac{\beta_0}{r} + \beta_1 \frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{r} + \ldots\right). \qquad (3.97)$$

Eine erste Näherung erhält man mit dem ersten Glied der Reihe für f und den beiden ersten Gliedern der Φ-Reihe. Die Randbedingungen auf der Kugel $r = r_0 = UR_0/\nu$ kann man dann zwar nicht exakt, aber doch näherungsweise für

$r_0 \ll 1$ erfüllen. In der Umgebung der Kugel gilt nämlich $\xi, r \ll 1$, und man kann dort f annähern durch

$$f = \frac{\alpha_0}{r}\, e^{-(r-\xi)/2} \approx \alpha_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{r-\xi}{2r}\right). \tag{3.98}$$

Die Geschwindigkeit folgt aus Gl. (3.88):

$$\frac{\boldsymbol{v}}{U} = \boldsymbol{i}\,(1 - r_0 f) + r_0 \operatorname{grad}_{\xi,\eta,\zeta} (f + \Phi/U R_0),$$

so daß auf der Kugel $(r = r_0)$ gilt:

$$\frac{u}{U} = -\frac{(\alpha_0+\beta_0)\,\xi}{r_0^2} + 1 - \alpha_0 + \frac{\alpha_0}{2} - \frac{\beta_1}{r_0^2} - \left(\frac{\alpha_0}{2} - \frac{3\beta_1}{r_0^2}\right)\frac{\xi^2}{r_0^2} - \frac{\alpha_0}{2}\,(r_0 - \xi)$$

$$\frac{v}{U} = -\frac{\eta}{r_0^2}\left[\alpha_0 + \beta_0 + \xi\left(\frac{\alpha_0}{2} - \frac{3\beta_1}{r_0^2}\right)\right]. \tag{3.99}$$

Werden die Koeffizienten so gewählt, daß $\alpha_0 = -\beta_0 = 6\beta_1/r_0^2 = 3/2$, so verschwinden auf der Kugel v (und w) exakt und u/U näherungsweise bis auf das letzte Glied von der Größenordnung $r_0 = UR_0/\nu \ll 1$.

Der statische Druck wird nach Gl. (3.89) durch Φ bestimmt:

$$p_\infty - p = \varrho U \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\varrho U^2}{\nu}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{\mu U}{R_0}\left[\frac{3\cos\Theta}{2(R/R_0)^2} - \frac{UR_0}{\nu}\,\frac{1-3\cos^2\Theta}{(R/R_0)^3}\right], \tag{3.100}$$

wobei $\cos\Theta = \xi/r = x/R$.

Die Rotation, die nur von f abhängt, wird nach Gl. (3.90):

$$\boldsymbol{w} = \operatorname{rot}\, \boldsymbol{v} = \frac{U^2}{\nu}\left[-\boldsymbol{j}\, r_0 \frac{\partial f}{\partial \zeta} + \boldsymbol{k}\, r_0 \frac{\partial f}{\partial \eta}\right],$$

also $$|\boldsymbol{w}| = \omega = \frac{U^2}{\nu}\, r_0 \sqrt{f_\zeta^2 + f_\eta^2} = \frac{3}{2}\,\frac{U^2 R_0}{\nu^2}\,\frac{\sqrt{r^2-\xi^2}}{r^3}\left(1 + \frac{r}{2}\right) e^{-(r-\xi)/2} \tag{3.101}$$

In der Stokesschen Näherung ergibt sich in gleicher Schreibweise:

$$\omega = \frac{3}{2}\,\frac{U^2 R_0}{\nu^2}\,\frac{\sqrt{r^2-\xi^2}}{r^3}. \tag{3.102}$$

Die danach in Fig. 77 gezeichneten Linien $\omega = \text{const}$ zeigen deutlich, wie diese erste Näherung nach Oseen in größerer Entfernung von der Kugel, für $r \gg r_0$ (bei $r_0 \ll 1$) von der Stokesschen Lösung abweicht; es läßt sich auch zeigen, daß jetzt die Trägheitsglieder dort um die Ordnung r_0 kleiner sind als die Reibungskräfte. Insbesondere ist erst die Oseensche Strömung vor und hinter der Kugel ($\xi < 0$ oder $\xi > 0$) verschieden, also irreversibel. Trotzdem ergibt sich derselbe Kugelwiderstand wie nach Stokes wegen der Übereinstimmung beider Lösungen für das Geschwindigkeits- und Druckfeld an der Kugel selbst. Erst wenn man

im Ansatz für f auch das zweite Glied und entsprechend in Φ zwei weitere Glieder berücksichtigt, wodurch die Randbedingungen auf der Kugel genauer erfüllt werden können, erhält man nach Oseen das folgende Korrekturglied für den Kugelwiderstand:

$$c_W = \frac{24}{Re}\left(1 + \frac{3}{16} Re\right),$$
$$Re = \frac{2\,U R_0}{\nu}. \qquad (3.103)$$

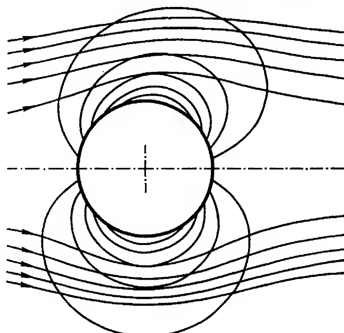


Fig. 77. Kugel in schleichender Strömung: unten nach Stokes, oben nach Oseen. Stromlinien- und Linien gleicher Rotation

S. Goldstein (1929) hat schließlich das Oseensche Gleichungssystem für die Kugel exakt gelöst. Wenn auch der hierfür erforderliche Rechenaufwand übertrieben erscheinen könnte, da ja auch diese mathematisch vollständige Lösung wegen der physikalischen Grundannahme nur für $U R_0/\nu = Re/2 \ll 1$ gelten kann, so paßt sich doch die zugehörige Abhängigkeit $c_W(Re)$ den Meßwerten selbst über $Re = 1$ hinaus noch am besten an (vgl. Fig. 11, S. 46).

Die ebene Strömung um einen Kreiszylinder berechnete H. Lamb (1911) nach der Oseenschen Methode. In erster Näherung ergibt sich hier mit

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 = \left(\frac{U R}{\nu}\right)^2 \quad \text{und} \quad R_0 = \text{Zylinderradius}$$

$$\Phi = U R_0 \left(\beta_0 \ln r + \beta_1 \frac{\partial}{\partial \xi} \ln r + \ldots\right) \qquad (3.104)$$

$$f = e^{\xi/2}\left[\alpha_0 K_0\left(\frac{r}{2}\right) + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial \xi} K_0\left(\frac{r}{2}\right) + \ldots\right], \qquad (3.105)$$

mit $$\alpha_0 = r_0 \beta_0 = \frac{4}{1 - 2\gamma - 2\ln(r_0/4)}, \quad \gamma = 0{,}577_2, \qquad (3.106)$$

und K_0 = Besselsche Funktion zweiter Art. Der Widerstand je Breiteneinheit wird $W = 2\pi\mu U \alpha_0$ und somit (wegen $r_0 = Re/2$)

$$c_W = \frac{16\pi/Re}{1 - 2\gamma - 2\ln(Re/8)} = \frac{25{,}13}{Re(2{,}002 - \ln Re)} \quad \text{für} \quad Re \ll 1. \qquad (3.107)$$

Auch hier weicht die mathematisch vollständige Lösung für $c_W(Re)$ von Bairstow, Cave und Lang (1923) von der experimentell bestimmten Abhängigkeit noch bis etwa $Re = 20$ nicht allzu stark ab (vgl. Fig. 11, S. 46), obwohl der Oseensche Ansatz physikalisch nur für $Re \ll 1$ sinnvoll ist.

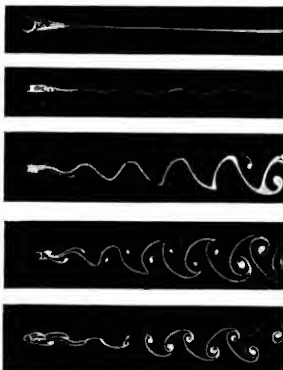


Fig. 78.
Ölströmung hinter Kreiszylindern nach F. Homann (Forsch. auf d. Gebiet d. Ing.-Wesen, 7 (1936) S. 1) bei verschiedenen Reynolds-Zahlen $Re = 32; 55; 65; 71; 101$

Neuere Methoden, bei denen die Trägheitsglieder der Navier-Stokes-Gleichung für kleine Re-Zahlen genauer angenähert werden als beim Oseenschen Ansatz, haben – zumindest numerisch – noch keine besseren Ergebnisse gebracht.

Die Strömung um einen Kreiszylinder bei einer speziellen Re-Zahl $Re = Ud/\nu = 20$ hat A. Thom (1933) mit einem Differenzenverfahren numerisch berechnet. Allgemein kann man erwarten, daß stationäre Umströmungen bis etwa $Re \leqslant 50$ berechenbar sind. Bei größerer Re-Zahl erweist sich aber der Nachlauf im Versuch als immer instabiler; die wirkliche Strömung wird trotz stationärer Randbedingungen zeitlich periodisch instationär. Das zeigen experimentelle Strömungsbilder von F. Homann (1936) hinter einem Kreiszylinder (Fig. 78), die den Übergang zur Kármánschen Wirbelstraße veranschaulichen.

3.5. Grenzschichttheorie

Im Grenzfall schleichender Strömungen mit $Re \ll 1$ konnten – zumindestens für räumliche Strömungen – in erster Näherung die Trägheitsglieder in der Navier-Stokes-Gleichung völlig vernachlässigt werden. Im praktisch weit wichtigeren Grenzfall $Re \to \infty$ kann man jedoch im allgemeinen die Reibungsglieder nicht einfach vernachlässigen und mit der Euler-Gleichung für ideale Flüssigkeit rechnen. Denn jede wirkliche Flüssigkeit und jedes Gas haftet an festen Wänden, und diese Randbedingung kann nicht erfüllt werden, wenn man die Ordnung der Navier-Stokes-Gleichung erniedrigt. Der Grenzwert einer Lösung der Navier-Stokes-Gleichung für $Re \to \infty$ braucht daher nicht gleich der Lösung zu sein, die man erhält, wenn man von vornherein die Navier-Stokes-Gleichung durch den Grenzübergang $Re \to \infty$ vereinfacht hat. Die Aufklärung und physikalische Deutung dieses Sachverhalts, der zunächst nur eine mathematische Spitzfindigkeit zu enthalten scheint, gab L. Prandtl 1904 in einer acht Seiten langen Arbeit[1]), die sich als Grundlage der modernen Strömungslehre erwies.

In der Umgebung eines umströmten Körpers muß wegen der Haftbedingung die Geschwindigkeit vom Wert null an der Körperoberfläche auf einen Wert von der Größenordnung der Anströmgeschwindigkeit U innerhalb einer Schicht

[1]) Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses, Heidelberg 1904.

von der Dicke δ ansteigen. Diese Schicht wird nun um so dünner sein, je größer die kinetische Energie der anströmenden Flüssigkeit und je weniger zäh die Flüssigkeit ist, d. h. aber, je größer die *Re*-Zahl des Körpers UL/ν ist, mit L = charakteristische Körperlänge. Je kleiner δ wird, um so größer werden die Geschwindigkeitsänderungen in der Schicht – ihre Größenordnung ist ja U/δ –, so daß sich auch bei kleiner Zähigkeit μ merkliche Schubspannungen $\mu U/\delta$ ergeben. In dieser dünnen Grenzschicht oder Reibungsschicht sind nun die Reibungs- und Trägheitskräfte von derselben Ordnung, wie unten gezeigt wird. Außerhalb der Schicht ist die Geschwindigkeit überall von der gleichen Größenordnung U, die Gradienten und Reibungskräfte sind daher klein, so daß dort die Potentialströmung einer idealen Flüssigkeit als Näherung der wirklichen Strömung ausreicht.

Der Einfachheit halber sei jetzt die ebene Strömung um einen zylindrischen, schlanken Körper wie in Fig. 79 betrachtet. Als x-Koordinate sei die Bogenlänge vom vorderen Staupunkt bezeichnet, y sei der Wandabstand senkrecht zur Körperoberfläche. Da jetzt nur die Strömung innerhalb der dünnen Schicht $y \leqslant \delta$ betrachtet werden soll, kann man sich an jeder Stelle x die Körperoberfläche durch die jeweilige Tangentialebene ersetzt denken, vorausgesetzt der örtliche Krümmungsradius R_K der Körperkontur ist überall groß gegen δ, und es sind auch keine plötzlichen Krümmungsänderungen vorhanden (d. h. $|dR_K/dx| \ll 1$). Insbesondere sind damit Strömungen um Körperkanten ausgeschlossen.

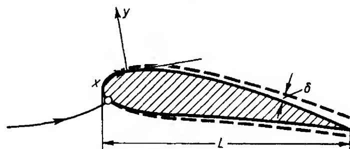


Fig. 79. Grenzschichtkoordinaten

Wenn nun bei großer *Re*-Zahl UL/ν die Grenzschichtdicke δ klein ist gegen die Körperabmessungen:

$$\delta \ll L,$$

so kann man die Navier-Stokessche Gleichung innerhalb der Schicht vereinfachen; offenbar muß dort z. B. $v \ll U$ gelten. Wir wollen nun die Größenordnung aller einzelnen Gleichungsterme abschätzen und führen dazu dimensionslose Koordinaten ein:

$$\xi = \frac{x}{L} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{y}{\delta},$$

die offenbar beide von der Größenordnung eins sind. Aus der Kontinuitätsgleichung folgt dann zunächst

$$v = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\,dy = -\frac{\delta}{L}\int_0^\eta \frac{\partial u}{\partial \xi}\,d\eta. \tag{3.108}$$

Da u von der Größenordnung der Anströmgeschwindigkeit U ist:

$$u \sim U,$$

wird auch $\frac{\partial u}{\partial \xi} \sim U$, $\frac{\partial u}{\partial \eta} \sim U$ und schließlich

$$v \sim \frac{U\delta}{L} \ll u. \tag{3.109}$$

(Das Zeichen $\sim$ soll hier Gleichheit der Größenordnung anzeigen.)
In den ursprünglichen Koordinaten würde dagegen z. B.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{L}\frac{\partial u}{\partial \xi} \sim \frac{U}{L} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\delta}\frac{\partial u}{\partial \eta} \sim \frac{U}{\delta}$$

und $$\frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{U}{L}\cdot\frac{\delta}{L} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{U}{L}.$$

Führt man noch für instationäre Grenzschichtströmungen einen Zeitmaßstab T ein, so erhält man folgende Größenordnungen für die Glieder der Navier-Stokes-Gleichungen ohne äußere Kräfte

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{3.110}$$

$$\frac{U}{T} \qquad \frac{U^2}{L} \qquad \frac{U\delta}{L}\cdot\frac{U}{\delta} \qquad\qquad \frac{\nu U}{L^2} \qquad \frac{\nu U}{\delta^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{3.111}$$

$$\frac{U\delta}{LT} \qquad \frac{U^2\delta}{L^2} \qquad \frac{U^2\delta}{L^2} \qquad\qquad \frac{\nu U\delta}{L^3} \qquad \frac{\nu U}{L\delta}.$$

In der ersten Gleichung kann offenbar $\partial^2 u/\partial x^2$ gegen $\partial^2 u/\partial y^2$ vernachlässigt werden, solange $\delta \ll L$. Ist die Strömung stationär, so muß das verbleibende Reibungsglied $\nu\partial^2 u/\partial y^2 \sim \nu U/\delta^2$ gleiche Größenordnung haben wie die konvektive Beschleunigung U^2/L; das Druckglied kann höchstens von dieser Ordnung sein, da sonst ein Gleichgewicht der Kräfte in x-Richtung überhaupt unmöglich wäre. Aus

$$\frac{\nu U}{\delta^2} \sim \frac{U^2}{L}$$

folgt aber für die Grenzschichtdicke

$$\frac{\delta}{L} \sim \sqrt{\frac{\nu}{UL}} = \sqrt{\frac{1}{Re}} \tag{3.112}$$

und somit tatsächlich

$$\delta \ll L \quad \text{für} \quad Re \to \infty.$$

Diese Beziehung bleibt auch für instationäre Strömung noch bestehen, wenn man Strömungen ausschließt, in denen starke Druckstöße von höherer Größenordnung als U^2/L vorkommen, die dann im wesentlichen dem entsprechend großen Beschleunigungsglied $\partial u/\partial t$ gleich sind. Benutzt man diese Abschätzung für δ in der zweiten Navier-Stokes-Gleichung, so findet man, daß das wesentliche

Reibungsglied $\nu\partial^2 v/\partial y^2$ und die Beschleunigungsglieder alle von der Größenordnung $U^2\delta/L^2$ sind. Schließt man wieder wie oben sehr plötzliche Beschleunigungen durch starke Druckstöße aus, so folgt daraus, daß auch der Quergradient des Druckes höchstens von dieser Größenordnung sein kann:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} \sim \frac{U^2\delta}{L^2} = \frac{U^2}{L}\frac{1}{\sqrt{Re}}. \tag{3.113}$$

Der Druckunterschied an der Wand und am Rand der Grenzschicht kann also höchstens von der Ordnung $\varrho\, U^2\delta^2/L^2 = \varrho\, U^2/Re$ sein, so daß er in erster Näherung vernachlässigt werden kann. In der Schicht herrscht demnach in Schnitten $x = \text{const}$ der gleiche Druck wie in der Potentialströmung außerhalb der Schicht.

Für ein Umströmungsproblem bei großer Re-Zahl ergibt sich nun folgendes Rechenprogramm. Zunächst bestimmt man die Potentialströmung einer idealen Flüssigkeit um den Körper, insbesondere die zugehörige Druckverteilung am Körper: $p(x,t)$ und die Längsgeschwindigkeit am Körper $U(x,t)$. Hierfür gilt nach der Euler-Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}. \tag{3.114}$$

Solange die gesuchte Grenzschicht zwischen Körper und äußerer Potentialströmung als dünn vorausgesetzt werden kann, kann man U als Außengeschwindigkeit am Rand der Grenzschicht auffassen und p als den örtlichen Druck am Grenzschichtrand, der – nach der obigen Abschätzung – sich fast unverändert durch die Schicht bis zum Körper fortpflanzt. Die Funktionen $p(x,t)$ bzw. $U(x,t)$ werden nun in die Grenzschichtgleichung eingesetzt; das ist die erste Navier-Stokes-Gleichung, in der das Glied $\partial^2 u/\partial x^2$ vernachlässigt wird:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{3.115}$$

mit $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0$ und den Randbedingungen für die Grenzschicht:

$$y = 0 \quad u = v = 0$$

$$y \to \delta \quad u \to U(x,t).$$

Gegenüber dem Problem, die Strömung bei beliebiger Re-Zahl zu berechnen, hat man nun für den Grenzfall $Re \to \infty$ folgende Vereinfachungen erzielt. Das Druckfeld kann näherungsweise gleich dem der Potentialströmung einer idealen Flüssigkeit um denselben Körper gesetzt werden; allerdings trifft dies nur für Strömungen um schlanke Körper bei kleinen Anstellwinkeln zu, was später (3.5.2) auf Grund der Konzeption der Grenzschicht selber noch begründet wird. Die Zähigkeit beeinflußt nur das Geschwindigkeitsfeld innerhalb der dünnen Grenzschicht, der Druck ist dort jedoch gleich dem der äußeren Potentialströmung. Damit ist eine der drei Unbekannten: p, u und v überall bekannt; andererseits entfällt auch eine Differentialgleichung, nämlich die zweite Navier-Stokes-Gleichung über den Impulsverlust in der Schicht quer zum Körper. Denn diese Gleichung handelt nur von Größen kleinerer Ordnung, verglichen mit den Gliedern der ersten Gleichung für die Komponenten längs der Wand. Diese,

die eigentliche Grenzschichtgleichung, ist allerdings nach wie vor nicht-linear und von zweiter Ordnung; zusammen mit der Kontinuitätsgleichung ermöglicht sie jedoch die Berechnung der Geschwindigkeiten u und v innerhalb der Schicht.

3.5.1. Die Grenzschicht an einer Platte. Das denkbar einfachste Beispiel einer stationären Grenzschichtströmung ist die längs einer dünnen, ebenen Platte bei $y = 0$, $x \geqslant 0$ wie in Fig. 80. Die Potentialströmung ist einfach $u = U =$ const, $v = 0$ mit $p =$ const; somit lautet die Grenzschichtgleichung hier

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad y = 0 \quad u = v = 0, \quad y \to \delta \quad u \to U. \tag{3.116}$$

Da keine charakteristische Körperlänge existiert, kann man vermuten, daß die Grenzschichtströmung an verschiedenen Stellen x ähnlich verläuft, d. h. daß das dimensionslose Geschwindigkeitsprofil überall gleich ist:

$$\frac{u}{U} = f(\eta), \quad \text{mit} \quad \eta = \frac{y}{\delta}.$$

Die Grenzschichtdicke δ kann dabei noch von x abhängen. Nach der obigen allgemeinen Formel $\delta/L \sim 1/\sqrt{Re}$ kann man δ hier abschätzen, indem man die jeweilige Entfernung x von der Plattenvorderkante als Körperlänge L einführt:

$$\delta \sim \sqrt{\nu \frac{x}{U}}.$$

Bei der instationären Strömung, die eine ruckartig beschleunigte Platte hervorruft, Gl. (3.57), ist $\delta \sim \sqrt{\nu t}$, wo t die Zeit seit Bewegungsbeginn bedeutet. Da man diese Abschätzung schon dimensionsanalytisch ableiten könnte, wird sie – zumindest der Größenordnung nach – sehr allgemein gelten. So kann man im vorliegenden Problem t als die Zeitdauer auffassen, während der ein Flüssigkeitsteilchen in der Grenzschicht längs der Platte von der Vorderkante bis zur Stelle x gelangt und dabei von der Zähigkeit beeinflußt wird. Diese Zeit ist von der Größenordnung x/U, und man gelangt wieder zur gleichen Abschätzung der Größenordnung von $\delta(x)$.

Führt man zur Erfüllung der Kontinuitätsbedingung eine Stromfunktion Ψ mit der Dimension Geschwindigkeit mal Länge ein, so wird mit den obigen Annahmen

$$\Psi = \int_0^y u \, dy = \sqrt{U \nu x}\, F(\eta), \quad f(\eta) = \frac{u}{U} = F'(\eta), \quad \eta = \sqrt{\frac{U}{\nu x}}\, y. \tag{3.117}$$

Geht man mit diesem Ansatz in die Grenzschichtgleichung, so ergibt sich in der Tat eine gewöhnliche Differentialgleichung für $F(\eta)$:

$$F F'' + 2 F''' = 0 \tag{3.118}$$

mit den Randbedingungen $\eta = 0 \quad F = F' = 0$

und $\eta \to \infty \quad F' = 1$.

Aus der Gleichung folgen dann (durch Differentiation) weitere Randbedingungen bei $\eta = 0$: $F''' = F^{IV} = 0$, $F^{V} \neq 0$ usw.

Die Funktion $F(\eta)$ hat H. Blasius (1908) numerisch berechnet, indem er je eine Reihenentwicklung für kleine und für große η aufstellte und so kombinierte, daß die Bedingungen an beiden Rändern erfüllt werden. Das Ergebnis $F'(\eta) = u/U$ sowie die Quergeschwindigkeit gibt in dimensionsloser Form Fig. 80.

Aus der Lösung folgt nun eine Wandschubspannung $\tau_0 = \mu(\partial u/\partial y)_{y=0}$ und daraus ein tangentialer Reibungswiderstand auf jeder Plattenseite mit der Breite b:

$$W = b \int_0^x \tau_0 \, dx = b \mu U F''(\eta = 0) \int_0^x \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \, dx = \mu b U F_0'' \, 2 \sqrt{\frac{U x}{\nu}} ;$$

mit $F_0'' = 0{,}332$.

Auf die Plattenfläche und den Staudruck der Anströmung bezogen erhält man also einen Widerstandsbeiwert für die Platte von der Länge x von:

$$c_f = \frac{W}{\frac{\varrho}{2} U^2 b x} = \frac{4 F_0''}{\sqrt{\frac{U x}{\nu}}} = \frac{1{,}328}{\sqrt{Re(x)}} . \qquad (3.119)$$

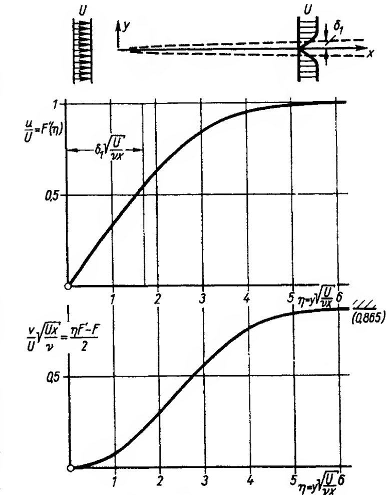


Fig. 80. Laminare Plattengrenzschicht

Die Flüssigkeitsteilchen in der Grenzschicht werden auf ihrem Weg längs der Platte immer stärker abgebremst, und die Grenzschichtdicke δ wächst mit $\sqrt{x}$ an. Die Potentialströmung außerhalb der Schicht wird daher auch immer mehr von der Platte weggedrängt; ein Maß dafür ist die sogenannte Verdrängungsdicke $\delta_1(x)$ der Grenzschicht. Zu ihrer Berechnung vergleicht man die zwischen der Platte ($y = 0$) und einem Punkt außerhalb der Schicht bei $y = Y > \delta$ durchfließende Menge mit derjenigen, die in einer fiktiven Potentialströmung U zwischen $y = \delta_1$ und $y = Y$ strömen würde:

$$\int_0^Y \varrho u \, dy = \varrho U (Y - \delta_1) .$$

Als Definitionsgleichung für δ_1 umgeschrieben ergibt das

$$\delta_1 = \int_0^Y \left(1 - \frac{u}{U}\right) \mathrm{d}y. \tag{3.120}$$

Wegen des schnellen, wenn auch nur asymptotischen Übergangs $u \to U$ für $y > \delta$ hängt δ_1 praktisch nicht von $Y > \delta$ ab. Für die Plattengrenzschicht wird speziell:

$$\delta_1 = \int_0^\infty [1 - F'(\eta)] \sqrt{\frac{\nu x}{U}}\, \mathrm{d}\eta = 1{,}72 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} = \frac{1{,}72\, x}{\sqrt{Re(x)}}. \tag{3.121}$$

Die Außenströmung wird also von der Platte abgedrängt, so daß ihre Stromlinien um den kleinen Winkel $V/U = \mathrm{d}\delta_1/\mathrm{d}x = 1{,}72/2\sqrt{Re(x)}$ gegen die Platte geneigt sind. Statt von der einfachen Parallelströmung müßte man also eigentlich von der Potentialströmung um einen parabolischen Zylinder mit der Dicke $\delta_1(x)$ ausgehen, um das Druckfeld zu berechnen. Eine solche Druckkorrektur ist aber bei der Plattenströmung vernachlässigbar, solange nur die Grundvoraussetzung $\delta \ll x$ zutrifft, was bei den üblichen Anwendungsfällen im Re-Zahl-Bereich 10^4 bis 10^6 der Fall ist. Allerdings gibt es in jedem Fall eine Umgebung der Vorderkante $x \approx 0$, wo diese Voraussetzung nicht erfüllt ist; insbesondere gilt dort auch nicht $|\partial^2 u/\partial x^2| \ll |\partial^2 u/\partial y^2|$. Diese singuläre Stelle könnte offensichtlich nur mit den nicht vereinfachten Navier-Stokes-Gleichungen untersucht werden. Jedoch wird die obige Lösung – das Blasius-Profil der Geschwindigkeit – experimentell in allen Einzelheiten durchaus bestätigt, solange die Re-Zahl unterhalb eines kritischen Werts Re_{krit} bleibt. Für $Re > Re_{\text{krit}}$ schlägt nämlich die laminare Strömungsform in die einer turbulenten Grenzschicht um. Im Versuch findet man gewöhnlich $Re_{\text{krit}} =$ etwa $5 \cdot 10^5$; bei besonders störungsfreier Anströmung kann die Laminarströmung aber noch bis $Re(x) = 3 \cdot 10^6$ aufrecht erhalten werden.

3.5.2. Grenzschichtablösung. Die Plattenströmung ist eines der wenigen Beispiele, in denen ein Strömungswiderstand – hier der tangentiale Reibungswiderstand – rein theoretisch berechnet werden kann. Als Gegenbeispiel sei nun die stationäre, ebene Strömung um einen Zylinder bei großer Re-Zahl betrachtet. Zunächst wird der zur jeweiligen Querschnittsform gehörige Druckverlauf $p(x)$ am Körper aus der Potentialströmung berechnet; der Druck fällt vom vorderen Staupunkt bei $(x = 0)$ auf einen Minimalwert und steigt auf der Rückseite des Zylinders wieder an. Die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht ist daher an verschiedenen Stellen x nicht mehr ähnlich wie an der Platte. Denn aus der Grenzschichtgleichung für stationäre Strömung folgt für $y = 0$ mit der Haftbedingung $u = v = 0$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \tag{3.122}$$

und übrigens noch durch Differentiation nach y

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_{y=0} = 0. \tag{3.123}$$

Die zweite Ableitung des Geschwindigkeitsprofils an der Wand hängt also nur vom Druckgefälle ab; insbesondere hat dort die Krümmung des Profils das gleiche Vorzeichen wie $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$. Auf der Vorderseite des Zylinders fällt nun der

Druck ab: $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x < 0$, d.h. wegen $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x = -\varrho U \mathrm{d}U/\mathrm{d}x$ ist die Außenströmung dort beschleunigt: $\mathrm{d}U/\mathrm{d}x > 0$, und die Wandkrümmung des Profils ist negativ. Umgekehrt gilt auf der Rückseite des Zylinders $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x > 0$, $\mathrm{d}U/\mathrm{d}x < 0$ und $(u_{yy})_{y=0} > 0$. Wegen des asymptotischen Übergangs $u \to U$ in größeren Wandabständen muß aber in jedem Fall u_{yy} von negativen Werten aus nach außen hin nach null abklingen. Daraus folgt, daß das Profil in Gebieten mit Druckanstieg stets einen Wendepunkt bei $y > 0$ hat, wie in Fig. 81 angedeutet; bei der Plattengrenzschicht mit $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x = 0$ liegt der Wendepunkt bei $y = 0$.

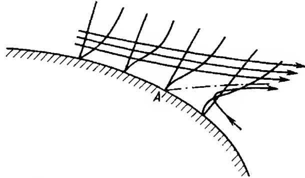


Fig. 81. Rückströmung hinter der Ablösestelle

In der Potentialströmung werden nun wandnahe Flüssigkeitsteilchen auf der Vorderseite des Zylinders so beschleunigt, daß sie auf seiner Rückseite trotz des dort entgegen gerichteten Druckgradienten gerade noch in die Nähe des hinteren Staupunkts gelangen. In der zugehörigen Grenzschicht werden die Teilchen aber durch die Zähigkeitswirkung von der Wand her abgebremst, und ihre kinetische Energie reicht dann nicht mehr aus, um ebenso weit gegen das Druckfeld auf der Rückseite anzulaufen wie in der Potentialströmung. Die Grenzschichtströmung weicht daher seitlich vom Körper weg aus: die Grenzschicht löst sich vom Körper ab.

Als Ablösestelle ist offenbar der Ort $x = x_\mathrm{A}$ zu definieren, wo die Geschwindigkeit nicht nur an der Wand $y = 0$ selbst verschwindet, sondern auch noch in unmittelbarer Wandnähe, wo also $(\partial u/\partial y)_{y=0} = 0$ gilt. Hinter dieser Stelle, für $x > x_\mathrm{A}$, bewirkt das Druckfeld sogar eine – wenn auch nur langsame – Rückströmung wie in Fig. 81; es beginnt dort das Totwasser hinter dem Zylinder. Natürlich gelten die Voraussetzungen der Grenzschichttheorie – wie z. B. $\partial u/\partial x \ll \partial u/\partial y$ – bestenfalls nur bis zur Ablösestelle.

Wenn sich die Grenzschicht ablöst, bleibt das wirbelbehaftete Gebiet nicht mehr auf eine dünne Schicht um den Körper selbst beschränkt (wie z. B. bei der Plattenströmung), sondern die in der Grenzschicht bis zur Ablösung erzeugte Rotation gelangt jetzt in die bisher als wirbelfrei angenommene Außenströmung. Durch diese wesentliche Änderung der Strömung auf der Rückseite des Zylinders und weiter stromabwärts wird nun auch schon die Außenströmung längs der Vorderseite, insbesondere auch die Druckverteilung dort, gegenüber der einfachen, wirbelfreien Potentialströmung, von deren Druckfeld man ausgegangen ist, abgewandelt. Berechnet man z. B. die Grenzschicht an einem Kreiszylinder, wie das K. Hiemenz (1911) zuerst getan hat, so findet man die Ablösestelle der Grenzschicht bei $\alpha \approx 105°$ – also auf der Rückseite des Zylinders –, wenn man die Druckverteilung der wirbelfreien Potentialströmung zugrunde legt. Hiemenz bestimmte aber auch experimentell die wirkliche Druckverteilung (im unterkritischen Bereich), bei der schon zwischen $\alpha = 70°$ bis $90°$ ein Druckanstieg auftritt. Berechnete er die Grenzschicht auf Grund dieses gemessenen Druckverlaufs, so erhielt er Ablösung schon auf der Vorderseite bei $\alpha = 82°$ in voller Übereinstimmung mit dem Versuch.

Wegen dieser Rückkopplung der Strömungsvorgänge hinter der Ablösung auf die Entwicklung der Grenzschicht vom Staupunkt bis zur Ablösung müßte man eigentlich die überaus komplizierte Strömung auf und hinter der Rückseite des Zylinders kennen. Der Nachlauf dort besteht jedoch aus einem Gebiet unbekannter Abmessungen, mit großen und kleinen, mehr oder weniger regelmäßigen Wirbeln. Abgesehen von der turbulenten Feinstruktur kann das ganze Gebiet bei gewissen *Re*-Zahlbereichen periodisch stark hin- und herschwanken, wenn sich – abwechselnd erst auf der einen, dann auf der anderen Seite des Zylinders – die aus der abgelösten Grenzschicht entstehenden Wirbelschichten zu Einzelwirbeln zusammenrollen, die sich erst in einem gewissen Abstand vom Zylinder zu einer regelmäßigen Kármánschen Wirbelstraße anordnen. Trotz praktisch symmetrischer, stationärer Randbedingung entsteht dadurch an einem Kreiszylinder ein periodisch wechselnder Auftrieb und Abtrieb, der nur im zeitlichen Mittel verschwindet, und auch der momentane Widerstand schwankt bis zu 15%[1]) um den Mittelwert.

3.5.3. Grenzschichttheorie und Strömungswiderstand. Der Widerstand eines Körpers mit stumpfer Rückseite – wie z. B. eines Kreiszylinders oder einer Kugel – hängt also im wesentlichen vom Totwasser hinter der Ablösestelle der Grenzschicht ab. Die einfache Potentialströmung dagegen umschließt den Körper, und der statische Druck steigt auf der Rückseite wieder an und erreicht im hinteren Staupunkt sogar den Staudruck; es ergeben sich dort Komponenten der Druckkraft auf den Körper entgegen der Anströmungsrichtung, und der Druckwiderstand des ganzen Körpers verschwindet gerade (D'Alembertsches Paradoxon). Im Totwasser hinter einer abgelösten Grenzschicht erreicht der statische Druck jedoch nicht wieder so hohe Werte – meistens bleibt er sogar negativ bezogen auf $p_\infty = 0$ –, und es ergibt sich insgesamt am Körper ein kräftiger Druckwiderstand. Dieser Totwasserdruck, der wegen der geringen Geschwindigkeiten dort nahezu konstant ist, kann vorläufig nur im Versuch bestimmt werden, ebenso wie der Widerstand solcher Körper.

Die Grenzschichttheorie allein ermöglicht demnach nicht die theoretische Lösung des allgemeinen Widerstandsproblems bei großen *Re*-Zahlen, sie erklärt jedoch zumindest qualitativ, wieso auch in einer Flüssigkeit beliebig kleiner Reibung überhaupt Wirbelschichten längs eines Körpers entstehen und sich an seiner Rückseite ablösen können. Die Gegenprobe hat L. Prandtl auch schon 1904 gemacht. Saugt man nämlich im Versuch die Grenzschicht durch einen oder mehrere kleine Schlitze in der Körperwand (vor der Ablösestelle) ab, so entzieht man der Strömung die wirbelbehafteten Flüssigkeitsteilchen, und man kann auf diese Weise die drehungsfreie Potentialströmung einer idealen Flüssigkeit verwirklichen. Da bei großer *Re*-Zahl die Grenzschicht sehr dünn ist, genügt dazu bereits das Absaugen einer sehr kleinen Flüssigkeitsmenge.

Zur Beschreibung der wirklichen Strömung reicht die Grenzschichttheorie nun um so besser aus, je schmaler das Totwasser am Körper ausfällt. Nicht nur im Grenzfall der dünnen Platte, sondern auch z. B. an schlanken Flügelprofilen bei kleinen Anstellwinkeln ist das Totwasser auf ein so kleines Gebiet beschränkt, daß seine Rückwirkungen in erster Näherung vernachlässigbar sind. Dann ist auch der Druckwiderstand klein gegen den aus der Grenzschicht berechenbaren

---

[1]) Y. C. Fung, J. Aerospace Sci. **27** (1960) S. 801.

tangentialen Reibungswiderstand. Gerade zur Berechnung der Strömung um solche praktisch interessierende, stromlinienförmige Körper mit kleinem Widerstand ist die Grenzschichttheorie besonders geeignet.

Im überkritischen *Re*-Zahlbereich wird die Grenzschicht am Körper nach einer laminaren Anlaufstrecke hinter dem Staupunkt turbulent. Qualitativ bleiben die Vorgänge, die zur Ablösung und Totwasserbildung führen, die gleichen wie für eine überall laminare Grenzschicht. Infolge des in turbulenter Strömung wesentlich größeren Impulsaustausches mit der Umgebung, d. h. also hier mit der Außenströmung, in der die Geschwindigkeit von der Größenordnung der Anströmung ist, hat jedoch die turbulente Reibungsschicht eine größere kinetische Energie, als die laminare Schicht; sie dringt daher weiter in das Druckanstieggebiet längs der Rückseite des Körpers vor, bevor sie sich ablöst. Daher findet man z. B. am Kreiszylinder Ablösung der turbulenten Reibungsschicht erst bei $\alpha = 120°$ bis $130°$, statt bei $82°$ im unterkritischen Bereich. Als Folge der späteren Ablösung wird das Totwasser kleiner, der Druck in ihm größer und der Druckwiderstand des ganzen Körpers, der bei stumpfer Körperform den Hauptanteil des Gesamtwiderstands ausmacht, wird wesentlich kleiner. Daraus erklärt sich der plötzliche Abfall des Widerstands eines Kreiszylinders oder auch einer Kugel beim laminar-turbulenten Umschlag der Grenzschicht bei $Re = Re_{\text{krit}}$ (vgl. Fig. 11, S. 46). Zum Beweis hierfür legte Prandtl um eine Kugel einen dünnen Stolperdraht (etwa bei $\alpha = 80°$); schon bei unterkritischer *Re*-Zahl (in der Nähe von Re_{krit}) ergab sich dann der niedrige Widerstand, wie er sonst – ohne künstliche Turbulenzerzeugung in der Grenzschicht durch den Stolperdraht – erst bei $Re > Re_{\text{krit}}$ gemessen wird.

3.5.4. Zur Berechnung von Grenzschichten. Entsprechend der praktischen Bedeutung von Strömungen mit großer *Re*-Zahl sind zahlreiche Methoden zur numerischen Berechnung von Grenzschichten aufgestellt und immer weitergehend verfeinert worden; hier können nur einige der Grundlagen skizziert werden. Bei der Grenzschichtrechnung handelt es sich im allgemeinen um eine Fortsetzungsaufgabe: Man geht von einer Anfangslösung aus – z. B. an einem Körper mit stumpfem Kopf von der exakten Lösung der Navier-Stokes-Gleichung in der Umgebung des Staupunkts – und berechnet die darauf folgenden Geschwindigkeitsprofile in der Schicht für wachsende Bogenlänge x. Die Komponenten u und v müssen der Kontinuitätsgleichung genügen und der Grenzschichtgleichung unter den Randbedingungen: an der Wand $y = 0$: $u = v = 0$ und am Rand der Schicht $u \to U(x)$.

Die stationäre Grenzschichtgleichung (3.115) ist eine Differentialgleichung von der Form $Au_{xx} + 2\,Bu_{xy} + Cu_{yy} = D$, die man – wie in 2.3.9 – als elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch bezeichnet, je nachdem ob $AC - B^2 > 0$, $= 0$ oder < 0 gilt. A, B, C und D können Funktionen von x, y, u, u_x und u_y sein. Offenbar ist die Grenzschichtgleichung mit $A = B = 0$ und $C = \nu$ vom parabolischen Typ, während die ursprüngliche Navier-Stokes-Gleichung wegen $A = C = \nu \neq 0$ und $B = 0$ vom elliptischen Typ ist. Vom mathematischen Standpunkt aus ist dieser Typuswechsel infolge der Vernachlässigung von u_{xx} (wegen $u_{xx} \ll u_{yy}$) sehr einschneidend, was hier nicht näher erläutert werden kann.

Die natürliche Problemstellung für parabolische Gleichung ist die der Fortsetzungsaufgabe (z. B. auch bei der Wärmeleitung), für elliptische dagegen die

Randwertaufgabe (wie z. B. in der Potentialtheorie). Das trifft auch hier zu. Beim Umströmungsproblem eines Körpers in zäher Flüssigkeit sind die Randwerte überall gegeben: am Körper $u = v = 0$ und im Unendlichen Parallelströmung $u = U_0$, $v = 0$. Die Vereinfachung dieses Problems für große Re-Zahlen führt auf die Fortsetzungsaufgabe der parabolischen Grenzschichtgleichung. Dabei kann nur die Weiterentwicklung der Schicht bis zur Ablösestelle berechnet werden; die Rückwirkung der abgelösten Schicht und des Totwassers auf das Strömungsfeld vor der Ablösung ließe sich aber nur mit der ungekürzten, elliptischen Navier-Stokes-Gleichung verfolgen.

Nach dieser allgemeinen Bemerkung wenden wir uns der Frage zu, in welchen dimensionslosen Koordinaten die Grenzschichtgleichung am zweckmäßigsten geschrieben wird. Bezieht man alle Geschwindigkeiten auf die Anströmgeschwindigkeit U_0 und Längen auf eine charakteristische Körperlänge L, so wird mit $u' = u/U_0$, $U'(x') = U(x)/U_0$, $x' = x/L$ usw.

$$u' u'_{x'} + v' u'_{y'} = U' U'_{x'} + \frac{1}{Re} u'_{y' y'}, \quad \text{mit} \quad Re = \frac{U_0 L}{\nu}. \tag{3.124}$$

Bei der Abschätzung der Größenordnung der einzelnen Ausdrücke war bereits gezeigt worden, daß die Grenzschichtdicke $\delta \sim L/\sqrt{Re}$ ein besserer Maßstab quer zur Körperoberfläche ist als L. Setzt man deshalb

$$x'' = x' = \frac{x}{L}, \; y'' = \frac{y}{L}\sqrt{Re}, \; u'' = u' = \frac{u}{U_0}, \; U'' = U' = \frac{U}{U_0},$$

so folgt aus der Kontinuitätsgleichung

$$v'' = -\int_0^{y''} \frac{\partial u''}{\partial x''} \, dy'' = \frac{v}{U_0}\sqrt{Re}.$$

Die Grenzschichtgleichung lautet dann

$$u'' u''_{x''} + v'' u''_{y''} = U'' U''_{x''} + u''_{y'' y''}, \tag{3.125}$$

mit $u'' \to U''$ für $y'' \to \infty$ und $u'' = v'' = 0$ für $y'' = 0$.

Die Re-Zahl erscheint jetzt nicht mehr als Parameter; die spezielle Körperform bestimmt die Funktion $U''(x'')$, die in der Differentialgleichung und in der Randbedingung auftritt. Für die Weiterentwicklung der Grenzschicht von der Stelle x zur Stelle $x + dx$ kann nun aber eine Körperabmessung L, wie z. B. die Körperlänge, kaum von Bedeutung sein, im Gegensatz etwa zur örtlichen Potentialgeschwindigkeit $U(x)$ am Rand der Schicht. Bei der halb unendlichen Platte existiert eine solche Länge überhaupt nicht, weshalb dort statt $U_0 L/\nu$ eingeführt wird: $U_0 x/\nu$, und statt $y\sqrt{Re}/L$ als dimensionsloser Wandabstand:

$$\frac{y\sqrt{U_0 x/\nu}}{x} = \frac{U_0 y}{\sqrt{\nu U_0 x}}.$$

Für einen beliebigen Körper mit der Potentialgeschwindigkeit $U(x) \neq$ const kann man diese Größen nun noch verallgemeinern und nach H. Görtler[1]) als unabhängige

[1]) J. Math. Mech. 6 (1957).

Variable die folgenden beiden Größen einführen:

$$\xi = \int_0^x \frac{U(x)\,\mathrm{d}x}{\nu} \tag{3.126}$$

und

$$\eta = \frac{U(x)\,y}{\left[2\nu \int_0^x U(x)\,\mathrm{d}x\right]^{1/2}} = \frac{U(x)\,y/\nu}{\sqrt{2\xi}}. \tag{3.127}$$

Für den Zusammenhang zwischen ξ und η mit den ursprünglichen Koordinaten: Bogenlänge x und Wandabstand y gilt:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{U}{\nu}, \quad \frac{\partial\xi}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial\eta}{\partial x} = \left(\frac{U_x}{U} - \frac{U}{2\nu\,\xi}\right)\eta, \quad \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{U}{\nu\sqrt{2\xi}}.$$

Der Stromfunktion $\Psi(x,y)$ entsprechend wird eine Funktion $F(\xi,\eta)$ so angesetzt, daß

$$u = \Psi_y = U(x)F_\eta, \quad v = -\Psi_x,$$

also

$$\Psi(x,y) = F(\xi,\eta)\,\nu\sqrt{2\,\xi}\,. \tag{3.128}$$

Dann geht die stationäre Grenzschichtgleichung (3.115)

$$\Psi_y\,\Psi_{xy} - \Psi_x\,\Psi_{yy} = U\,U_x + \nu\,\Psi_{yyy} \tag{3.129}$$

schließlich über in

$$F_{\eta\eta\eta} + F F_{\eta\eta} + \beta(\xi)\left(1 - F_\eta^2\right) = 2\xi\left(F_\eta F_{\xi\eta} - F_\xi F_{\eta\eta}\right), \tag{3.130}$$

mit

$$\beta = 2\nu\xi\frac{U_x}{U^2} = \frac{2U_x}{U^2}\int_0^x U\,\mathrm{d}x,$$

und den Randbedingungen

$$F(\xi,0) = F_\eta(\xi,0) = 0 \quad \text{und} \quad F_\eta(\xi,\infty) = 1\,.$$

In dieser Formulierung sind jetzt auch noch die Randbedingungen unabhängig von der jeweiligen Körperform; diese bestimmt nur noch die Verteilung der Potentialgeschwindigkeit am Körper $U(x)$ und damit die Koeffizientenfunktion $\beta(x)$ oder $\beta(\xi)$ in der obigen Grenzschichtgleichung. Auf Grund dieser Gleichung hat H. Görtler eine Methode entwickelt, nach der aus der Potenzreihenentwicklung für $U(x)$ vom Staupunkt aus mit Hilfe tabulierter Funktionen die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht, insbesondere der Verlauf der Verdrängungsdicke und der Wandschubspannung, schnell berechnet werden kann. Gegenüber früheren Reihenentwicklungen hat die Methode den Vorteil, größerer Allgemeinheit und besserer Konvergenz.

3.5.5. Ähnliche Grenzschichtlösungen. Als ähnliche Grenzschichtlösungen bezeichnet man solche, bei denen die Geschwindigkeitsprofile $u(y)$ an verschiedenen Stellen x bzw. ξ des Körpers sich nur im Geschwindigkeits- und Längenmaßstab unterscheiden. Das ist insbesondere der Fall, wenn $u/U(x)$ überall am Körper gleich derselben Funktion des dimensionslosen Wandabstands η ist, wenn also – wegen $u/U(x) = F_\eta$ – die Funktion $F(\xi,\eta)$ überhaupt nicht von ξ abhängt:

$$F_\xi = 0\,.$$

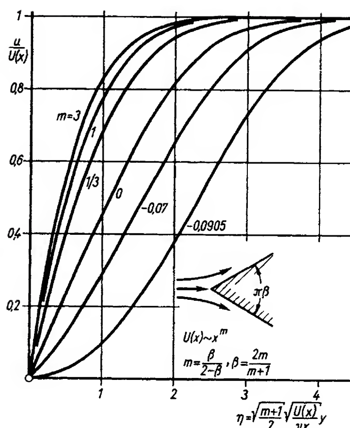


Fig. 82. Ähnliche Grenzschichtprofile

Dann verschwindet die rechte Seite der Gl. (3.130), und auf der linken Seite ist $F(\xi, \eta) = F(\eta)$ nur dann möglich, wenn

$$\beta = \text{const.}$$

Solche ähnliche Lösungen ergeben sich insbesondere, wenn

$$U \sim x^m, \quad \text{mit} \quad m > -1\,,$$

weil dann gilt

$$\beta = \frac{2m}{m+1} = \text{const}\,,$$

$$\text{oder} \quad m = \frac{\beta}{2-\beta}. \tag{3.131}$$

Sofern $0 \leqslant m \leqslant 1$ ergibt sich nach 2.2.2 diese Außengeschwindigkeit $U(x)$ in der Umgebung der Kante eines ebenen Keils mit dem Öffnungswinkel $\pi\beta$.

Allgemein läßt sich zeigen, daß alle ähnlichen Lösungen von der Form sind: $U \sim x^m, m \neq -1$ aber sonst beliebig, sowie $U \sim e^{ax}$ als Grenzfall für $m \to \infty$ und $\beta = 2$, wenn man die Definition von β nach Gl. (3.130) etwas abändert. Stets ergibt sich die gewöhnliche Differentialgleichung

$$F''' + FF'' + \beta(1 - F'^2) = 0 \tag{3.132}$$

mit $$F(0) = F'(0) = 0 \quad \text{und} \quad F(\infty) = 1.$$

Sie wurde von V. M. Falkner und S. W. Skan[1]) aufgestellt und von D. R. Hartree[2]) ausführlich untersucht. Einige solcher Lösungen zeigt Fig. 82. Der Fall $m = \beta = 0$ entspricht der Blasius-Lösung für die ebene Platte. Bei $m = \beta = 1$ ergibt sich die Grenzschicht in der Nähe des Staupunkts einer senkrecht angeströmten Platte, die als exakte Lösung der Navier-Stokes in 3.3.5 beschrieben worden ist. Negative m- oder β-Werte entsprechen verzögerten Strömungen mit Druckanstieg; die zugehörigen Grenzschichtprofile haben einen Wendepunkt. Das ähnliche Ablösungsprofil mit $(\partial u/\partial y)_{y=0} = 0$ ergibt sich für

$$m = -0{,}090_4 \quad \text{oder} \quad \beta = -0{,}199.$$

Der Spezialfall: $m = -1$, $\beta \to \infty$ muß gesondert betrachtet werden; er kann als Strömung in einem konvergenten Kanal mit ebenen Wänden aufgefaßt werden.

---

[1]) Phil. Mag. **12** (1931).
[2]) Proc. Camb. phil. Soc. **33** (1937).

Hier wird für $U(x) = -c/x$, $c > 0$ (vgl. Fig. 83) mit der Transformation

$$Y = y\sqrt{\frac{-U(x)}{\nu x}} = \frac{y}{x}\sqrt{\frac{c}{\nu}} \quad \text{und} \quad \Psi = -\sqrt{c\nu}\, f(Y), \quad u = \Psi_y = U(x) f' \quad (3.133)$$

nach Gl. (3.129)

$$f''' - f'^2 + 1 = 0, \quad \text{mit} \quad f(0) = f'(0) = 0 \quad \text{und} \quad f'(\infty) = 1. \quad (3.134)$$

Die Lösung dieser speziellen Gleichung läßt sich übrigens geschlossen angeben:

$$f' = \frac{u}{U} = 3\,\tanh^2\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} + \tanh^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}\right) - 2. \quad (3.135)$$

3.5.6. Impuls- und Energiegleichung für Grenzschichten. Zur näherungsweisen Berechnung von Grenzschichten genügt es oft schon, die Grenzschichtgleichung nicht überall in jedem Wandabstand $y < \delta$ zu erfüllen, sondern nur im Mittel für die ganze Schicht zwischen $y = 0$ und $y = \delta$. Da solche Näherungsverfahren vor allem auch für turbulente Reibungsschichten wichtig sind, schreiben wir das Reibungsglied allgemein (innerhalb der Grenzschichtvernachlässigungen) $\partial(\tau/\varrho)/\partial y$. In einer laminaren Schicht ist dabei $\tau = \mu\,\partial u/\partial y$ zu setzen; dort, wo die Strömung innerhalb der Schicht turbulent verläuft, hängt τ allerdings nicht mehr in so einfacher und eindeutiger Weise von der örtlichen Geschwindigkeitsverteilung ab.

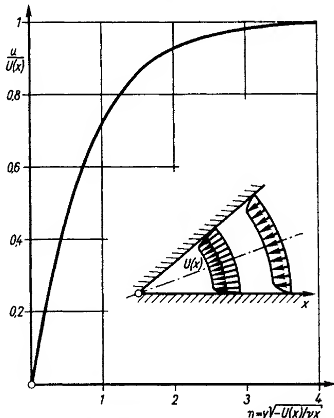


Fig. 83. Grenzschicht im konvergenten Kanal

Um instationäre Strömungen einzuschließen, setzen wir nach Bernoulli für das durch die Außenströmung $U(x,t)$ aufgeprägte Druckgefälle:

$$-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x}$$

und schreiben die Grenzschichtgleichung für ebene Strömungen jetzt:

$$u_t + u\,u_x + v\,u_y = U_t + U\,U_x + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\tau}{\varrho}. \quad (3.136)$$

Fügt man auf der linken Seite den Ausdruck $uu_x + uv_y$ hinzu, der nach der Kontinuitätsgleichung verschwindet, so kann man durch die ganze Schicht

hindurch über y integrieren:

$$\left[\frac{\tau}{\varrho}\right]_0^\infty = -\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty (U-u)\,\mathrm{d}y + \int_0^\infty (2\,u u_x - U U_x)\,\mathrm{d}y + \left[u v\right]_0^\infty . \tag{3.137}$$

An der Wand verschwindet wegen der Haftbedingung u, und τ ist dort gleich der Wandschubspannung τ_0; am Rand der Schicht für $y=\delta$ bzw. $y\to\infty$ verschwindet τ beim Übergang in die äußere Potentialströmung, und es wird dort $u=U$.

Die Quergeschwindigkeit v ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung zu

$$v = v_0 - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y;$$

durch $|v_0| \ll U$ sei ein schwaches Ausblasen ($v_0>0$) in die Schicht oder Absaugen ($v_0<0$) in die Körperwand mitberücksichtigt. Dann wird aus Gl. (3.137)

$$\frac{\tau_0}{\varrho} = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty (U-u)\,\mathrm{d}y + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty u\,(U-u)\,\mathrm{d}y + U_x\int_0^\infty (U-u)\,\mathrm{d}y - U v_0 . \tag{3.138}$$

Dies ist der Impulssatz für Grenzschichten nach von **Kármán** (1921). Man kann diesen Satz (im Rahmen der Grenzschichtvernachlässigungen) auch direkt ableiten für eine Kontrollfläche, die von zwei Ebenen $x=\mathrm{const}$ und $x+\mathrm{d}x=\mathrm{const}$, der Körperoberfläche und dem Rand der Grenzschicht gebildet wird. Der Impulsfluß durch diese Kontrollfläche bestimmt sich aus den Drucken und äußeren Kräften (hier $\tau_0\mathrm{d}x$) an dieser Fläche.

Definiert man noch als

Verdrängungsdicke $$\delta_1(x,t) = \int_0^\infty \left(1-\frac{u}{U}\right)\mathrm{d}y \tag{3.139}$$

und Impulsverlustdicke $$\delta_2(x,t) = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)\mathrm{d}y\,, \tag{3.140}$$

so kann man den Impulssatz auch umschreiben:

$$\frac{\tau_0}{\varrho U^2} = \frac{1}{U^2}\frac{\partial}{\partial t}(U\delta_1) + \frac{\partial\delta_2}{\partial x} + \frac{U_x}{U}(\delta_1+2\delta_2) - \frac{v_0}{U} . \tag{3.141}$$

Multipliziert man die Grenzschichtgleichung erst mit u und integriert dann durch die Schicht über y von 0 bis ∞, so erhält man nach ähnlichen Umformungen einen Energiesatz. Mit der Definition einer

Energieverlustdicke $$\delta_3 = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left[1-\left(\frac{u}{U}\right)^2\right]\mathrm{d}y \tag{3.142}$$

lautet er:

$$2\int_0^\infty \frac{\tau}{\varrho U^2}\frac{\partial u/U}{\partial y}\,\mathrm{d}y = -2\int_0^\infty \frac{u}{U}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tau}{\varrho U^2}\right)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{U^2}\frac{\partial}{\partial t}(U^2\delta_2) + \frac{1}{U}\frac{\partial \delta_1}{\partial t} + \frac{1}{U^3}\frac{\partial}{\partial x}(U^3\delta_3) - \frac{v_0}{U}. \quad (3.143)$$

Der dissipierten Energie entspricht der Verlust an Druckarbeit und kinetischer Energie in der Schicht.

Natürlich kann man weitere derartige Gleichungen aufstellen und schließlich die partielle Grenzschichtgleichung (3.136) durch ein System von unendlich vielen gewöhnlichen Differentialgleichungen ersetzen. Bei Näherungsverfahren begnügt man sich jedoch, den Impulssatz für die ganze Flüssigkeit in der Schicht und eventuell noch den Energiesatz zu erfüllen.

Ein fast triviales Anwendungsbeispiel ist die stationäre, laminare Plattenströmung mit $U = \text{const}$. Nimmt man hier der Einfachheit halber statt des asymptotischen Übergangs $u \to U$ für $y \to \infty$ eine Grenzschichtdicke $\delta(x)$ an, außerhalb derer $u = U$ für $y \geqslant \delta(x)$ gilt, so wird wieder für ähnliche Profile:

$$\frac{u}{U} = f(\eta) \quad \text{mit} \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)} \quad \text{und} \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1\,.$$

Dann gibt der Impulssatz $\tau_0/\varrho U^2 = \mathrm{d}\delta_2/\mathrm{d}x$ eine Gleichung für $\delta(x)$:

$$\frac{\mu U}{\delta}\frac{f'(0)}{\varrho U^2} = \left(\frac{\delta_2}{\delta}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x}.$$

Mit den Abkürzungen

$$\alpha_0 = f'(0), \qquad \alpha_3 = \frac{\delta_3}{\delta} = \int_0^1 f(1-f^2)\,\mathrm{d}\eta$$

$$\alpha_1 = \frac{\delta_1}{\delta} = \int_0^1 (1-f)\,\mathrm{d}\eta, \qquad \alpha_4 = \int_0^1 f'^2\,d\eta$$

$$\alpha_2 = \frac{\delta_2}{\delta} = \int_0^1 f(1-f)\,\mathrm{d}\eta$$

ergibt sich z. B. für die Verdrängungsdicke und die Wandschubspannung

$$\frac{\delta_1}{x}\sqrt{\frac{Ux}{\nu}} = d_{\text{Imp}} = \alpha_1\sqrt{\frac{2\alpha_0}{\alpha_2}}$$

und

$$\frac{\tau_0}{\varrho U^2}\sqrt{\frac{Ux}{\nu}} = t_{\text{Imp}} = \sqrt{\frac{\alpha_0\alpha_2}{2}}.$$

Andererseits gilt nach dem Energiesatz:

$$2\int_{-0}^{\delta} \frac{\nu}{U}\left(\frac{\partial u/U}{\partial y}\right)^2 \mathrm{d}y = \frac{2\nu}{U\delta}\alpha_4 = \frac{\mathrm{d}\delta_3}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\delta_3}{\delta}\right)\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x},$$

woraus folgt

$$\frac{\delta_1}{x}\sqrt{\frac{Ux}{\nu}} = d_{\mathrm{En}} = 2\alpha_1\sqrt{\frac{\alpha_4}{\alpha_3}}$$

und

$$\frac{\tau_0}{\varrho U^2}\sqrt{\frac{Ux}{\nu}} = t_{\mathrm{En}} = \alpha_0\sqrt{\frac{\alpha_3}{4\alpha_4}}.$$

Um die Zahlenkoeffizienten berechnen zu können, ist nun eine Geschwindigkeitsverteilung $f(\eta)$ einzuführen, die wenigstens die Randbedingungen $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ erfüllt. Die primitivste derartige Funktion ist offenbar $f(\eta) = \eta$. Einen sanfteren Übergang zur Potentialströmung bei $\eta = 1$ gibt etwa die ebenfalls einfache Funktion $f(\eta) = \sin \pi\eta/2$. Hierfür erhält man folgende Zahlen:

	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	d_{Imp}	d_{En}	t_{Imp}	t_{En}
$f = \eta$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	1	1,732	2	0,289	0,250
$f = \sin\frac{\pi}{2}\eta$	$\frac{\pi}{2}$	$1-\frac{2}{\pi}$	$\frac{4-\pi}{2\pi}$	$\frac{2}{3\pi}$	$\frac{\pi^2}{8}$	1,743	1,752	0,328	0,326
exakt						1,721		0,332	

Die wesentlich kleineren Abweichungen zwischen den nach dem Impuls bzw. dem Energiesatz errechneten Zahlen für d und t für das Sinusprofil zeigen, daß dieses natürlich eine bessere Näherung als das Geradenprofil darstellt, Der Rechenaufwand ist in beiden Fällen sehr viel kleiner als nach der exakten Methode von **Blasius**, bei der eine nichtlineare Differentialgleichung numerisch integriert werden mußte.

3.5.7. Manglers Transformation. Die Berechnung von Grenzschichten an Drehkörpern, die in Richtung der Drehachse stationär angeströmt werden, ist nur wenig komplizierter als die für ebene Körper. Die rotationssymmetrische Strömung ist ebenfalls zweidimensional, da zwei Koordinaten zur Ortsbestimmung ausreichen. Bezeichnen s die Bogenlänge längs der Körperoberfläche vom vorderen Staupunkt aus, n den Wandabstand in Richtung der örtlichen Normalen, r den Abstand von der Drehachse mit $r = r_0(s)$ auf dem Körper, so ist (vgl. Fig. 84) $r = r_0 + n\cos\alpha$, $\tan\alpha = \mathrm{d}r_0(x_{\mathrm{A}})/\mathrm{d}x_{\mathrm{A}}$, wobei x_{A} die Koordinate längs der Achse ist. Kontinuitäts- und Grenzschichtgleichung lauten hier

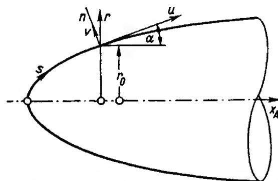


Fig. 84. Koordinaten am Umdrehungskörper

$$\frac{\partial}{\partial s}(ru) + \frac{\partial}{\partial n}(rv) = 0. \qquad (1.28)$$

$$uu_s + vu_n = UU_s + \nu u_{nn}. \qquad (3.144)$$

Dieses Gleichungssystem kann wesentlich vereinfacht werden, solange die Schichtdicke als klein gegen den örtlichen Körperradius vorausgesetzt werden kann. Es gilt dann nämlich innerhalb der Schicht $n \ll r_0$, und es kann in der Kontinuitätsgleichung $r = r_0$ gesetzt oder eine Stromfunktion Ψ so angesetzt werden, daß:

$$r_0(s) \cdot u = \frac{\partial \Psi}{\partial n}, \quad r_0(s) \cdot v = -\frac{\partial \Psi}{\partial s}.$$

Wenn auch direkte Berechnungsverfahren für rotationssymmetrische Grenzschichten kaum schwieriger sind als für ebene Strömung, ist es doch von Interesse, daß man nach W. Mangler[1]) jede solche Grenzschicht auf die in einer ebenen Strömung zurückführen kann. Dazu wird folgende Transformation eingeführt:

$$x(s) = \int_0^s \frac{r_0^2}{L^2}\,ds, \quad y(s,n) = \frac{r_0}{L}\,n, \quad \overline{\Psi}(x,y) = \frac{1}{L}\,\Psi(s,n), \tag{3.145}$$

wo L eine Länge ist, etwa der größte Körperradius oder die Länge des Drehkörpers. Damit wird

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{r_0^2}{L^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{r_0'}{L}\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{r_0}{L}\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{mit} \quad r_0' = \frac{dr_0}{ds}. \tag{3.146}$$

Bezeichnet man die aus $\overline{\Psi}$ folgenden Geschwindigkeiten als

$$\overline{u} = \overline{\Psi}_x \quad \text{und} \quad \overline{v} = -\overline{\Psi}_y, \tag{3.147}$$

so wird

$$u = \frac{1}{r_0}\Psi_n = \overline{\Psi}_y = \overline{u} \quad \text{und} \quad v = -\frac{1}{r_0}\Psi_s = \frac{r_0}{L}\overline{v} - \frac{r_0'}{r_0}\overline{u}. \tag{3.148}$$

In Gl. (3.144) eingesetzt, ergibt sich mit $U(s) = \overline{U}(x)$, $U_s = (r_0^2/L^2)\,\overline{U}_x$ nach Multiplikation mit L^2/r_0^2:

$$\overline{u}\,\overline{u}_x + \overline{v}\,\overline{u}_y = \overline{U}\,\overline{U}_x + \nu\,\overline{u}_{yy}$$

und natürlich als Kontinuitätsgleichung wegen (3.147)

$$\overline{u}_x + \overline{v}_y = 0\,.$$

Das ist aber gerade das Gleichungssystem für eine ebene Grenzschicht.

Als einfaches Beispiel sei die drehsymmetrische Staupunktsströmung betrachtet, die sich in der Nähe des Staupunkts jedes axial angeströmten Drehkörpers mit stumpfem Kopf ergibt. Hier ist wegen $\alpha = \pi/2$ die Voraussetzung $r = r_0$ sogar exakt erfüllt, und es gilt ferner:

$$s = r_0 \quad \text{und} \quad U = a r_0, \tag{3.149}$$

folglich

$$x(r_0) = \int_0^{r_0} \frac{r_0^2}{L^2}\,dr_0 = \frac{r_0^3}{3L^2}, \quad y = \frac{r_0 n}{L}$$

und

$$\overline{U}(x) = a r_0 = a(3L^2)^{1/3} \cdot x^{1/3}. \tag{3.150}$$

[1]) ZAMM **28** (1948).

Nach 2.2.2 stellt sich diese Verteilung der Potentialgeschwindigkeit in der Umgebung der Kante eines ebenen Keils mit einem gesamten Öffnungswinkel von $\pi\beta = \pi/2$ ein (denn für $m = 1/3$ wird hier $\beta = 2m/(m+1) = 1/2$).

Für sehr langgestreckte Drehkörper wird diese Transformation auf eine ebene Grenzschicht bei größeren Rücklagen allmählich ungültig, weil wegen des Anwachsens der Grenzschicht dann die Voraussetzung $\delta \ll r_0$ nicht mehr genau genug zutrifft. In solchen Fällen muß man mit Gl. (1.28) und (3.144) arbeiten, um die Querkrümmung der Grenzschicht mitzuberücksichtigen. Schließlich kann man auch am schlanken Hinterende eines Drehkörpers überhaupt nicht mehr die Grenzschichtvernachlässigungen vornehmen, wenn dort δ und r_0 von gleicher Größenordnung geworden sind; die Stromlinien innerhalb des zähigkeitsbeeinflußten Gebiets um den Körper sind dann nicht mehr parallel zum Körper, und der Druck ist nicht mehr konstant auf einer Körpernormale. In den praktischen Anwendungen (z. B. beim Torpedo) ist die Strömung dort schon meistens turbulent, aber selbst für laminare Strömung fehlen Berechnungsmethoden für dieses Gebiet.

Die Manglersche Transformation gilt übrigens auch noch für kompressible Grenzschichten. Für turbulente Grenzschichten ist aber noch keine analoge Beziehung zwischen drehsymmetrischen und ebenen Strömungen gefunden worden.

Wegen des Ausbaus der Grenzschichttheorie und ihrer Erweiterung auf instationäre, auf kompressible sowie dreidimensionale Grenzschichten sei auf die umfangreiche Literatur[1]) verwiesen.

3.6. Hydrodynamische Stabilität

In früheren Kapiteln ist schon darauf hingewiesen worden, daß auch exakte Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen im Versuch nur unterhalb einer gewissen *Re*-Zahl bestätigt werden; wird die zugehörige kritische *Re*-Zahl überschritten, so findet man eine turbulente Strömung statt der berechneten laminaren vor. Offenbar wird die letztere für größere *Re*-Zahlen instabil gegen kleine, zufällige Störungen, und es gehört zur vollständigen Lösung eines Strömungsproblems noch eine Abgrenzung des Stabilitätsbereichs.

Zur Berechnung der Stabilität einer stationären Grundlösung $\mathbf{v}$, p denkt man sich dieser instationäre Störungen $\mathbf{v}'$, p' überlagert, wobei die gestörte Strömung $\mathbf{v} + \mathbf{v}'$, $p + p'$ wieder die Navier-Stokessche Gleichung, die Kontinuitätsbedingung und die Randbedingungen befriedigt. Die Störung wird als klein gegen die Grundströmung vorausgesetzt: $|\mathbf{v}'| \ll |\mathbf{v}|$, so daß die Störungsgleichung linearisiert werden kann. Wenn es nun möglich ist, zeitlich anwachsende Störungen zu berechnen, so ist die Instabilität der Grundströmung nachgewiesen. Denn die anfangs beliebig kleinen Störungen können dann mit der Zeit anwachsen und die ursprüngliche Grundströmung völlig verändern. Meistens entsteht dabei eine ganz andersartige turbulente Strömung, in einzelnen Fällen (vgl. 3.6.3) ergibt sich aber zunächst eine neue Strömung, die auch noch

[1]) Z. B. H. Schlichting, Grenzschicht-Theorie, 5. Aufl. Karlsruhe 1965; oder L. Rosenhead Ed., Laminar Boundary Layers, Oxford 1963.

laminar ist. Die Stabilitätstheorie ist nun wegen der nichtlinearen Grundgleichungen mathematisch äußerst kompliziert, so daß hier nur gewisse Ausgangsgleichungen skizziert werden können.

3.6.1. Ebene Strömungen und Störungen. Als kinematisch einfachste Strömungen betrachten wir ebene Strömungen und ebene Störungen. Dann kann man von der Wirbelgleichung (3.33) ausgehen, die den Druck nicht mehr enthält, und die für die Grundströmung U, V und $\Omega = V_x - U_y$ lautet:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + U \frac{\partial \Omega}{\partial x} + V \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \nu \Delta \Omega . \qquad (3.151)$$

Die gestörte Strömung $U+u$, $V+v$ und $\Omega+\omega$ muß eine entsprechende Gleichung erfüllen. Zieht man von dieser Gleichung die erste ab und vernachlässigt quadratische Glieder in u, v und ω, so erhält man

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \Omega + U \frac{\partial}{\partial x} \omega + v \frac{\partial}{\partial y} \Omega + V \frac{\partial}{\partial y} \omega = \nu \Delta \omega . \qquad (3.152)$$

Als einfachsten Fall betrachtet man eine nahezu parallele Grundströmung mit

$$U = U(y), \quad V \approx 0 \quad \text{und} \quad \Omega \approx -U_y .$$

Hierfür gilt dann

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U \frac{\partial \omega}{\partial x} - U_{yy} v = \nu \Delta \omega . \qquad (3.153)$$

Wegen der Linearität dieser Gleichung für die Störung kann man sich diese in eine Fourier-Reihe entwickelt denken, und es genügt, eine Partialschwingung zu betrachten, deren Amplitude ebenso wie die Koeffizienten U und U_{yy} in der Differentialgleichung von y abhängt. Man setzt daher für die Stromfunktion Ψ der Störung an:

$$\Psi(x, y, t) = \varphi(y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha x - \beta t)} . \qquad (3.154)$$

In dieser rechnerisch bequemen, komplexen Schreibweise ist entweder der Real- oder der Imaginärteil von Ψ physikalisch sinnvoll. Im einzelnen ist

$\varphi(y) = \varphi_r + \mathrm{i}\varphi_i$, α = reell = Wellenzahl = $2\pi/\lambda$ mit λ = Wellenlänge der Störung, $\beta = \beta_r + \mathrm{i}\beta_i$.

Offenbar bedeutet $\beta_i < 0$ eine zeitlich abklingende, gedämpfte Schwingung, und $\beta_i > 0$ eine angefachte Schwingung. Die komplexe Phasengeschwindigkeit ist $c = c_r + \mathrm{i} c_i = \beta/\alpha = \beta_r/\alpha + \mathrm{i}\beta_i/\alpha$. Mit diesem Ansatz wird nun

$$\omega = -\Delta\Psi = (\alpha^2 \varphi - \varphi'')\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha x - \beta t)} , \qquad (3.155)$$

und die Störungsgleichung lautet nach W. M. F. Orr[1]) und A. Sommerfeld[2])

$$(U-c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - U_{yy}\varphi = -\frac{\mathrm{i}\nu}{\alpha}(\varphi^{\mathrm{IV}} - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi) . \qquad (3.156)$$

[1]) Proc. R. Irish Acad. **A 27** (1907).
[2]) Atti Congr. internat. Mat. Roma **3** (1908).

Sie ist die Ausgangsgleichung zur Stabilitätsuntersuchung nicht nur der Couette- und (ebenen) Poiseuille-Strömung, sondern insbesondere auch von ebenen Grenzschichten. Die Grenzschichtdicke wächst zwar in Strömungsrichtung x langsam an, so daß diese Grundströmung wegen $V \neq 0$ keine exakte Parallelströmung ist; es zeigt sich aber, daß die wesentlichen Störungen Wellenlängen von nur einigen Grenzschichtdicken haben, die also noch klein gegenüber solchen Lauflängen sind, in denen sich die Grenzschichtströmung merklich ändert.

Die Beschränkung auf ebene Störungsbewegungen wurde von H. B. Squire[1]) gerechtfertigt, der nachwies, daß eine ebene (inkompressible) Strömung bei dreidimensionalen Störungen erst bei höheren Re-Zahlen instabil wird als bei ebenen Störungen. Zur Berechnung der kleinsten Re-Zahl, bei der eine Strömung instabil sein kann, muß man daher gerade mit den einfacheren, ebenen Störungen rechnen. Bei einer Grenzschicht, etwa an einem Flügelprofil, entspricht diese theoretische Re-Zahl dem sogenannten Indifferenzpunkt, bis zu dem die Grenzschicht mit Sicherheit laminar bleibt. Hinter dieser Stelle werden zufällige Störungen immer stärker angefacht, bis schließlich der experimentell zu ermittelnde Umschlagpunkt erreicht ist, von dem ab die Grenzschicht turbulent ist. Der Abstand zwischen Indifferenz- und Umschlagpunkt hängt außer von dem dortigen Druckverlauf natürlich auch von der Störungsfreiheit der Anströmung und der Rauhigkeit der Wandfläche ab.

Die Störungsgleichung wird dimensionslos, wenn man alle Längen auf eine charakteristische Länge L und die Geschwindigkeiten etwa auf U_m, die Maximalgeschwindigkeit der Grundströmung, bezieht; statt ν steht dann $1/Re$ mit $Re = U_m L/\nu$. Die Randbedingungen lauten z. B. für die ebene Poiseuille-Strömung: für $y = y_1$ und $y = y_2$ sollen die Normal- und Tangentialgeschwindigkeiten der Störung verschwinden: $\varphi_r = \varphi_i = 0$ und $\varphi_r' = \varphi_i' = 0$. Bei einer Grenzschicht wird mit $y =$ Wandabstand $y_1 = 0$ und $y_2 \to \infty$. Vorgegeben ist nun die Grundströmung $U(y)$, die Re-Zahl (oder ν) und eine angenommene Wellenzahl α; die Störungsgleichung gibt dann mit den jeweiligen Randbedingungen die zugehörige Eigenfunktion und den komplexen Eigenwert $c = c_r + ic_i$. Je nachdem ob $c_i < 0$ oder $c_i > 0$ ist, wird die Schwingung (α) gedämpft oder angefacht. Der Grenzfall $c_i(\alpha, Re) = 0$ entspricht einer neutralen Schwingung; die hierfür zugehörige $\alpha(Re)$-Abhängigkeit nennt man Indifferenzkurve, da sie in einer Auftragung α über Re das instabile ($c_i > 0$) und das stabile Gebiet ($c_i < 0$) voneinander trennt. Die kleinste Re-Zahl dieser Kurve ist diejenige des Indifferenzpunktes Re_{Ind}; für $Re < Re_{Ind}$ werden alle harmonischen Störungen gedämpft, also auch beliebige kleine Störungen, da diese durch eine Fourier-Reihe (vgl. (3.154)) dargestellt werden können.

Erfahrungsgemäß schlägt eine laminare Strömung erst bei großer Re-Zahl ($Re \gg 1$) in die turbulente um, so daß es nahe liegt, zunächst die Störungsgleichung für ideale Flüssigkeiten zu untersuchen, also für den Grenzfall $\nu \to 0$ oder $Re \to \infty$. Man kann dann für die Störung nur die Randbedingungen $\varphi_r = \varphi_i = 0$ auf $y = y_1$ und y_2 erfüllen, da die reibungslose Störungsgleichung nur von zweiter Ordnung ist. Für diese hat Lord Rayleigh (1880) zwei wichtige allgemeine Sätze abgeleitet. Dazu wird die Störungsgleichung (mit $\nu = 0$) zunächst umgeschrieben:

$$\varphi'' - \alpha^2 \varphi = \frac{U_{yy}}{U - c}\,\varphi = \frac{U_{yy}(U - c_r + ic_i)}{(U - c_r)^2 + c_i^2}\,\varphi. \tag{3.157}$$

[1]) Proc. Roy. Soc. A **142** (1933).

Multipliziert man nun beide Seiten mit $\bar{\varphi} = \varphi_r - i\varphi_i$, so wird $\varphi\bar{\varphi} = \varphi_r^2 + \varphi_i^2 = |\varphi|^2 > 0$ (und reell) und man erhält:

$$\varphi_r \varphi_r'' + \varphi_i \varphi_i'' + i(\varphi_r \varphi_i'' - \varphi_r'' \varphi_i) - \alpha^2 |\varphi|^2 = \frac{U_{yy}(U - c_r + i c_i)}{|U - c|^2} |\varphi|^2. \qquad (3.158)$$

Integriert man jetzt noch über y von y_1 bis y_2, beachtet dabei die Randbedingungen und zerlegt in Real- und Imaginärteil der Gleichung, so wird schließlich:

$$-\int_{y_1}^{y_2} (|\varphi'|^2 + \alpha^2 |\varphi|^2)\, dy = \int_{y_1}^{y_2} \frac{|\varphi|^2}{|U - c|^2} U_{yy}(U - c_r)\, dy < 0 \qquad (3.159)$$

$$0 = \int_{y_1}^{y_2} \frac{|\varphi|^2}{|U - c|^2} U_{yy} c_i\, dy. \qquad (3.160)$$

Betrachten wir zunächst nur neutrale Schwingungen mit $c_i = 0$ und $c = c_r$, für die die zweite Gleichung automatisch erfüllt ist. Wenn U_{yy} zwischen y_1 und y_2 das Vorzeichen nicht wechselt, so ist überall $U_{yy} < 0$, da $U > 0$ und mindestens bei $y = y_1$ $U = 0$. Für solche konvexen Geschwindigkeitsprofile kann nun nicht überall $c_r > U$ sein, da ja sonst das Integral auf der rechten Seite der ersten Gleichung positiv wäre statt negativ. Es gibt also unter den neutralen Schwingungen mindestens eine, für die in einer kritischen Schicht $y = y_k$ gilt: $U - c_r = 0$. Nach der reibungslosen Störungsgleichung müßte dort $\varphi'' \to \infty$, falls nicht am gleichen Ort U_{yy} verschwände. Diese Singularität an der Stelle, wo die Phasengeschwindigkeit c_r gleich der Strömungsgeschwindigkeit ist und die Störung dauernd auf die gleichen Flüssigkeitsteilchen wirkt, kann erst durch Berücksichtigung der Zähigkeit aufgelöst werden.

Setzen wir nun umgekehrt $c_i \neq 0$ voraus, so ist der Nenner des zweiten Integrals stets positiv, und dieses kann nur dann verschwinden, wenn U_{yy} zwischen y_1 und y_2 das Vorzeichen wechselt. Insbesondere sind angefachte Schwingungen (mit $c_i > 0$) nur möglich, wenn das Geschwindigkeitsprofil einen Wendepunkt hat. W. Tollmien (1935) bewies, daß dies nicht nur eine notwendige, sondern auch eine hinreichende Bedingung ist: Profile mit Wendepunkt sind instabil für $Re \to \infty$. Der Tendenz nach bleibt dieses Resultat auch bei Berücksichtigung der Zähigkeit noch richtig: konvexe Geschwindigkeitsprofile, wie in der Grenzschicht bei Druckabfall, sind gegenüber Störungen weit weniger anfällig als die Profile mit Wendepunkt in der Grenzschicht beim Druckanstieg am hinteren Teil eines umströmten Körpers.

Die Sätze für die reibungslose Störungsgleichung lassen die Hauptschwierigkeiten der Stabilitätsrechnung erahnen: zumindestens in der kritischen Schicht ($U - c_r \approx 0$) muß mit der vollständigen Störungsgleichung gerechnet werden, und weiterhin ist die Grundströmung $U(y)$ sehr genau darzustellen, da es wesentlich auf deren zweite Ableitung U_{yy} ankommt.

Die erste erfolgreich durchgeführte Stabilitätsrechnung für eine solche ebene Strömung stammt von W. Tollmien[1]). Er untersuchte die Stabilität der Plattenströmung, also das Blasius-Profil, das an der Wand selbst einen Wendepunkt hat, und berechnete die Indifferenzkurve (für $c_i = 0$). Das Verfahren

[1]) Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1929.

wurde vor allem von H. Schlichting[1]) auf andere Grenzschichten angewandt und weiter ausgebaut, insbesondere auch auf die Berechnung der angefachten Schwingungen (mit $c_i > 0$). Das Hauptergebnis für die Plattenströmung zeigt Fig. 85 (nach einer neueren Nachberechnung von S. F. Shen[2])). Die Wellenzahl α ist mit der Verdrängungsdicke $\delta_1 = 1{,}72\,x/\sqrt{Re}$ [Gl. (3.121)] dimensionslos gemacht, ebenso wie die Wellenlänge der Störung $\lambda/\delta_1 = 2\pi/\alpha\,\delta_1$; Abszisse ist die mit δ_1 bzw. der Plattenlänge gebildete Re-Zahl. Bei größeren Re-Zahlen als $U_\infty \delta_1/\nu = 420$ oder $U_\infty x/\nu = 6 \cdot 10^4$ gibt es jeweils einen gewissen Bereich von Störungswellen, die verschieden stark angefacht werden, während Wellen zu kurzer oder zu großer Wellenlänge gedämpft werden. Diese theoretischen Ergebnisse wurden von H. L. Dryden[3]), G. B. Schubauer und H. K. Skramstad[4]) 1943 experimentell völlig bestätigt; dabei erzeugte ein sehr dünnes Metallband in der Plattengrenzschicht in einem Windkanal – elektromagnetisch angeregt – Schwingungen verschiedener Wellenzahl, deren Auswirkungen mit Hitzdrähten gemessen wurden. In welcher Weise infolge solcher instabilen langen Störungen ($\lambda > 15\,\delta_1$ nach Fig. 85) die laminare Strömung sich zur turbulenten entwickelt, ist noch Gegenstand experimenteller Untersuchungen. Während der Indifferenzpunkt bei $U_\infty x/\nu = 6 \cdot 10^4$ liegt, findet man eine turbulente Reibungsschicht an der Platte gewöhnlich erst ab $Re_{\text{krit}} = 3$ bis $5 \cdot 10^5$; bei besonders störungsfreier Strömung konnte Laminarströmung sogar bis $Re_{\text{krit}} = 3 \cdot 10^6$ aufrecht erhalten werden.

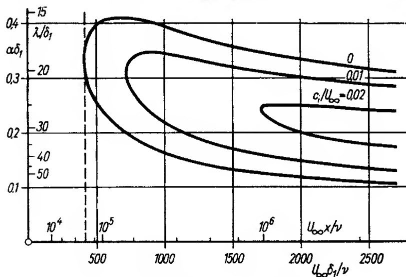


Fig. 85. Zur Stabilität der Plattengrenzschicht

3.6.2. Stabilität der Poiseuille- und Couette-Strömung. Die Strömung durch ein Rohr mit kreisförmigem Querschnitt, an der Reynolds zum ersten Mal den laminar-turbulenten Umschlag untersuchte, ist offenbar für den Experimentator die allereinfachste Strömung. Den Theoretikern ist es jedoch trotz vieler Bemühungen nicht gelungen, kleine Störungen im Sinne der obigen Theorie zu finden, gegen die diese laminare, drehsymmetrische Poiseuille-Strömung instabil wäre[5]). Theorie und Wirklichkeit stimmen hier jedoch dann wieder

---

[1]) Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1932, 1933 und 1935. Vgl auch Schlichting, Grenzschichttheorie, 5. Aufl. Karlsruhe 1965.

[2]) J. Aero. Sci. **21** (1954).

[3]) Vgl. NACA TN **1168** (1947).

[4]) Vgl. J. Aero. Sci. **14** (1947).

[5]) Jedoch kann die Instabilität der ebenen Poiseuille-Strömung zwischen zwei parallelen Platten nachgewiesen werden; und zwar wird nach C. C. Lin $Re_{\text{Ind}} = U_{\max} a/\nu = 5300$ mit a = halbe Kanalbreite. Quart. Appl. Math. **3** (1945/6).

überein, wenn die Entstehung der Poiseuille-Strömung mitberücksichtigt wird. Ist nämlich ein langes Rohr an einen Kessel angeschlossen, so findet man nach L. Schiller[1]) bei laminarer Strömung erst nach einer Anlaufstrecke von etwa $0{,}03\,d\,Re$ Länge eine Poiseuille-Strömung mit parabolischer Geschwindigkeitsverteilung vor. Denn am Einlauf bildet sich zunächst nur an der Rohrwand eine Grenzschicht aus, und in Rohrmitte eine drehungsfreie Kernströmung mit konstanter Geschwindigkeit. Es kommt also in Wirklichkeit auf die Stabilität dieser grenzschichtähnlichen Anlaufströmung an; ist diese von einer gewissen Re-Zahl ab instabil, so entsteht gar keine Poiseuille-Strömung, sondern die Anlaufströmung wird schon vorher turbulent.

Ähnlich sind die Verhältnisse bei der Couette-Strömung zwischen zwei konzentrischen, rotierenden Zylindern. Die Stabilität wird hier zusätzlich noch von der Zentrifugalkraft mitbeeinflußt. Wenn z. B. der äußere Zylinder rotiert und der innere ruht, so wirkt auf weiter außen strömende Flüssigkeitsteilchen mit höherer Geschwindigkeit nach außen eine größere Zentrifugalkraft als auf Teilchen nahe dem ruhenden, inneren Zylinder. Das entspricht ganz der Schichtung leichterer Flüssigkeit über schwererer. Diese Schichtung wirkt stabilisierend, da bei einer störenden Querbewegung z. B. leichtere Flüssigkeit in schwerere gedrückt oder schwerere in leichtere Flüssigkeit gehoben werden müßte.

Je kleiner der Spalt d zwischen den Zylindern (Radien R_1 und R_2) ist: $d = R_2 - R_1 \ll R_1, R_2$, um so mehr wird die ebene Couette-Strömung angenähert. Bei dieser ist die Geschwindigkeitsverteilung linear und das Stabilitätsproblem mathematisch so einfach als möglich. Es zeigt sich aber, daß diese Strömung gegenüber zweidimensionalen fortschreitenden Störungswellen stabil ist, obwohl schon Couette (1890) experimentell $Re_{\text{krit}} = U d/\nu \approx 2000$ fand (bei stillstehendem inneren Zylinder gültig für $d/R_{1,2} <$ etwa 0,05). Dieser Widerspruch läßt sich nach H. Schlichting dadurch auflösen, daß man die zeitliche Entwicklung der Strömung untersucht, also die zunächst nicht-linearen Geschwindigkeitsverteilungen, die der in Rotation versetzte äußere Zylinder in der ursprünglich ruhenden Flüssigkeit erzeugt. Ähnlich wie bei der Entstehung der Poiseuille-Strömung kann nämlich bei zu großer Re-Zahl schon die Anlaufströmung durch zufällige Störungen turbulent werden, noch bevor die stabile, eigentliche Couette-Strömung verwirklicht worden ist.

3.6.3. Dreidimensionale Störungen. Noch vor der Tollmienschen Berechnung der Instabilität der Plattengrenzschicht gegen längs der Platte fortschreitende ebene Störungswellen gelang es G. I. Taylor[2]) 1923, die Instabilität der Strömung zwischen zwei konzentrischen, rotierenden Zylindern gegen gewisse dreidimensionale Störungen nachzuweisen.

Warum diese Strömung unter Umständen instabil wird, ist qualitativ leicht einzusehen. Wenn jetzt der innere Zylinder rotiert und der äußere feststeht, so wirkt auf die schnellen Flüssigkeitsteile in der Nähe des inneren Zylinders eine größere Zentrifugalkraft nach außen, als auf die langsamen Flüssigkeitsschichten im äußeren Teil des Spalts zwischen den Zylindern; und das entspricht der instabilen Schichtung einer leichteren Flüssigkeit unter einer schwereren. Taylor beobachtete nun, daß dann von einer gewissen Re-Zahl ab regelmäßige

[1]) ZAMM **2** (1922).
[2]) Phil. Trans. Roy. Soc. **A 223** (1923).

Ringwirbel der Grundströmung überlagert sind; längs der Achse der Zylinder treten diese Wirbel im gleichen Abstand, aber mit abwechselndem Drehungssinn auf. Das von Taylor beobachtete und berechnete Stromlinienbild dieser zellularen Wirbel in einem Spaltquerschnitt zeigt Fig. 86.

Diese Strömung ist im Gegensatz zur zweidimensionalen Grundströmung jetzt dreidimensional, erfüllt aber die gleichen Randbedingungen und ist nach wie vor durchaus regelmäßig und laminar. Das einzige Zufallselement ist die absolute Lage des Wirbelsystems längs der Achse; man kann nicht voraussagen, ob an einer bestimmten Stelle ein rechts- oder linksdrehender Wirbel auftreten wird. Die ursprüngliche Grundströmung wird nun durch diese dreidimensionale Sekundärströmung stabilisiert, denn die neue Strömung verhält sich in einem ganzen Re-Zahlbereich stabil. Erst bei noch höherer Re-Zahl erfolgt schließlich der Umschlag zur turbulenten Strömung, in deren mittlerer Geschwindigkeitsverteilung die Taylorschen Wirbel noch immer erkennbar bleiben.

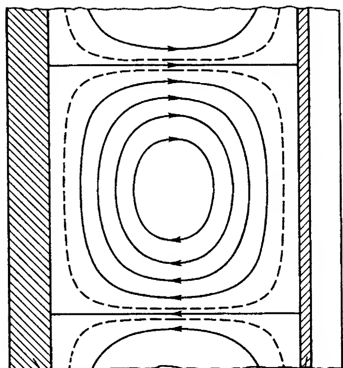


Fig. 86.
Taylor-Wirbel zwischen rotierenden Zylindern

Da die eigentliche Stabilitätsberechnung sehr kompliziert ist, soll hier nur die relativ einfache Ableitung der Störungsgleichung gezeigt werden. Man führt Zylinderkoordinaten r, Φ, z mit den Geschwindigkeitskomponenten u, v, w in radialer Richtung, Umfangsrichtung und parallel zur Zylinderachse ein. Auch die ringförmige Wirbelströmung wird als achsensymmetrisch vorausgesetzt, so daß u, v, w nicht von Φ abhängen. Die Kontinuitäts- und Navier-Stokes-Gleichungen (vgl. Anhang) vereinfachen sich dann zu:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{3.161}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\Delta u - \frac{u}{r^2}\right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial r} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} &= \nu\left(\Delta v - \frac{v}{r^2}\right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta w\,, \end{aligned}\right\} \tag{3.162}$$

$$\text{mit} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,. \tag{3.163}$$

Für die stationäre Grundströmung mit $U = W = 0$ folgt für $V(r)$ aus dem Verschwinden des Reibungsgliedes der zweiten Navier-Stokes-Gleichung:

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} - \frac{1}{r^2}V = 0 \tag{3.164}$$

mit der Lösung

$$V = Ar + \frac{B}{r}. \tag{3.165}$$

Ist $\omega_{1,2}$ die Winkelgeschwindigkeit und $R_{1,2}$ der Radius des inneren (1) oder des äußeren (2) Zylinders, so folgt aus $V(R_{1,2}) = \omega_{1,2} R_{1,2}$

$$A = \frac{\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

$$B = \frac{R_1^2 R_2^2 (\omega_1 - \omega_2)}{R_2^2 - R_1^2}. \tag{3.166}$$

Das radiale Druckgefälle ist gleich der Zentrifugalkraft pro Volumeneinheit, oder nach Gl. (3.162)

$$\frac{dp(r)}{dr} = \frac{\varrho V^2}{r}. \tag{3.167}$$

Die gestörte instationäre Strömung $u', V + v', w'$ und $p + p'$ muß auch die Navier-Stokessche Gleichung erfüllen; solange die Störgrößen klein sind, kann man darin quadratische Ausdrücke vernachlässigen und erhält:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru') + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \tag{3.168}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u'}{\partial t} - \frac{2Vv'}{r} - \underline{\frac{V^2}{r}} &= \underline{-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial r}}(p + p') + \nu\left(\Delta u' - \frac{u'}{r^2}\right)\\
\frac{\partial v'}{\partial t} + 2Au' &= \nu\left(\Delta v' - \frac{v'}{r^2}\right)\\
\frac{\partial w'}{\partial t} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p'}{\partial z} + \nu\Delta w'.
\end{aligned} \tag{3.169}$$

(Die beiden unterstrichenen Glieder heben sich nach (3. 167) auf.)

Die oben beschriebenen Wirbelringe, die sich in Achsenrichtung periodisch wiederholen, beschreibt Taylor nun durch den reellen Ansatz:

$$\begin{aligned}
u' &= u_1(r)e^{\gamma t}\cos\sigma z\\
v' &= v_1(r)e^{\gamma t}\cos\sigma z\\
w' &= w_1(r)e^{\gamma t}\sin\sigma z\\
p' &= p_1(r)e^{\gamma t}\cos\sigma z.
\end{aligned} \tag{3.170}$$

Je nachdem γ positiv oder negativ ist, wird die Strömung angefacht oder gedämpft.

Wegen der Kontinuitätsgleichung (3.168) wird jetzt:

$$-\sigma w_1 = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r u_1) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{r}\right) u_1. \tag{3.171}$$

Aus der dritten Navier-Stokes-Gleichung folgt

$$\frac{\sigma}{\varrho} p_1 = \nu \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - \sigma^2 - \frac{\gamma}{\nu}\right) w_1, \tag{3.172}$$

und daraus nach etwas Rechnung

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}r} = \frac{\nu}{\sigma^2}\left\{\left(L - \sigma^2 - \frac{\gamma}{\nu}\right) L\right\} u_1, \tag{3.173}$$

wobei L folgenden Operator bezeichnet:

$$L(u_1) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{r}\right) u_1 = \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - \frac{1}{r^2}\right) u_1. \tag{3.174}$$

Eliminiert man damit den Druck aus der ersten Navier-Stokes-Gleichung, so bleiben die beiden Gleichungen:

$$\left(L - \sigma^2 - \frac{\gamma}{\nu}\right)(L - \sigma^2) u_1(r) = \frac{2\sigma^2}{\nu}\left(A + \frac{B}{r^2}\right) v_1(r) \tag{3.175}$$

$$\left(L - \sigma^2 - \frac{\gamma}{\nu}\right) v_1(r) \qquad = \frac{2}{\nu} A u_1(r) \tag{3.176}$$

mit den Randbedingungen, daß die Störungen u', v', w' an beiden Zylindern verschwinden müssen, also für $r = R_1$ und $r = R_2$: $u_1 = v_1 = \mathrm{d}u_1/\mathrm{d}r = 0$.

Schließlich könnte man u_1 oder v_1 aus diesen Gleichungen noch eliminieren und erhielte dann jeweils eine Differentialgleichung sechster Ordnung für $v_1(r)$ oder $u_1(r)$. Neben der trivialen Nullösung $u_1(r) = v_1(r) = 0$ haben diese Gleichungen nur dann eine Eigenlösung, wenn die Koeffizienten darin eine charakteristische Gleichung erfüllen:

$$F(A, B, \nu, \sigma, \gamma) = 0, \quad \text{mit} \quad A, B = f(R_1, R_2, \omega_1, \omega_2).$$

Macht man noch alle Längen mit der Spaltweite $d = R_2 - R_1$ und alle Geschwindigkeiten etwa mit der Umfangsgeschwindigkeit des inneren Zylinders $\omega_1 R_1$ dimensionslos und führt als Re-Zahl die Größe

$$Re = \omega_1 R_1 \frac{d}{\nu}$$

ein, so wird $\quad F_*\left(\frac{R_2}{R_1}, \frac{\omega_2}{\omega_1}, Re, \sigma, \gamma\right) = 0.$

Zur Bestimmung der Stabilitätsgrenze interessiert besonders die neutrale Störung mit $\gamma = 0$. Denkt man sich für die Grundströmung die Werte R_2/R_1 und ω_2/ω_1 festgehalten, so tritt je nach der Wellenzahl σ in z-Richtung diese neutrale Störung bei einer zugehörigen Re-Zahl $Re(\sigma)$ auf. Die kleinste dieser Re-Zahlen ist dann die jeweilige gesuchte kritische Re-Zahl: $Re_{\mathrm{krit}}(R_2/R_1, \omega_2/\omega_1)$.

Das oben skizzierte Eigenwertproblem löste Taylor für den Fall kleiner Spaltbreite: $d = R_2 - R_1 \ll R_{1,2}$; gleichzeitig bestimmte er das erste Auftreten der Ringwirbel in sehr sorgfältigen Versuchen. Als Beispiel für die ausgezeichnete

Übereinstimmung von Theorie und Messung gibt Fig. 87 einige seiner Ergebnisse für $R_2 = 4{,}035\,\text{cm}$, $R_1 = 3{,}55\,\text{cm}$ und $d/R_1 = 0{,}485/3{,}55 = 0{,}137$ wieder. Die gestrichelte Gerade $\omega_1/\omega_2 = R_2^2/R_1^2 = 1{,}292$ entspricht einem Stabilitätskriterium von Rayleigh für ideale Flüssigkeit, wenn beide Zylinder gleichen Drehungssinn haben. Die Bezeichnung instabil für das Gebiet $Re > Re_{\text{krit}}$ bezieht sich nur

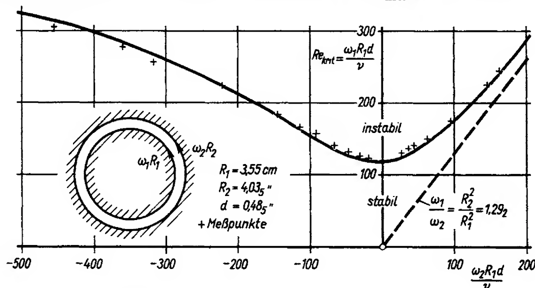


Fig. 87. Instabilität der Couette-Strömung nach G. I. Taylor

auf die zweidimensionale Grundströmung; es sei nochmals betont, daß die Taylor-Wirbel für nicht allzu große $Re > Re_{\text{krit}}$ nicht unbegrenzt (mit $e^{\gamma t}$) angefacht werden, sondern nur bis zu einer gewissen Stärke, die aber mit der nach den Störgliedern linearisierten Theorie natürlich nicht bestimmt werden kann.

Für den Spezialfall des ruhenden äußeren Zylinders $\omega_2 = 0$ kann man die Ergebnisse von Taylor für kleine Spaltweiten und die von K. Kirchgässner[1]) für größere d/R_1-Werte in einer Näherungsformel zusammenfassen:

$$Re_{\text{krit}}(\omega_2 = 0) = \omega_1 R_1 \frac{d}{\nu} = \left(41{,}1 + 14{,}5\frac{d}{R_1}\right)\sqrt{\frac{R_1 + R_2}{2d}}, \qquad (3.177)$$

für $d/R_1 \leqslant 1$ und $d = R_2 - R_1$.

Nach H. Görtler[2]) können ähnliche Wirbel auch in der laminaren Grenzschicht längs einer konkav gekrümmten Wand auftreten; die Wand entspricht dann dem ruhenden äusseren Zylinder, und die Strömung wird statt von dem rotierenden inneren Zylinder hier von der Außenströmung angetrieben (vgl. Fig. 88). Die Lösung dieses

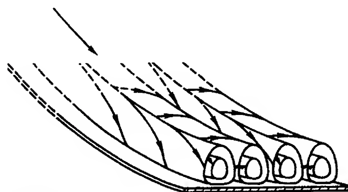


Fig. 88.
Görtler-Wirbel längs einer konkav gekrümmten Wand

[1]) Z. ang. Math. und Physik 12 (1961), 61.

[2]) Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 2 (1940).

Eigenwertproblems ist für die Stabilität der Grenzschicht längs einer konkaven Wand entscheidend; an ebenen oder konvexen Wänden entstehen dagegen zuerst fortschreitende, ebene Wellen nach Tollmien und Schlichting. Es ist aber durchaus möglich, daß dort, wo diese Wellen hinreichend steil geworden sind, in den Tälern mit konkav gekrümmten Stromlinien Taylor-Görtlersche Wirbel auftreten. Dies würde auch erklären, warum die sich schließlich ergebende turbulente Strömung stets dreidimensional ist.

3.7. Turbulente Strömungen

3.7.1. Einführung. Der bisher behandelte laminare Strömungszustand ist für den Theoretiker der einfachste und natürlichste. Bei den meisten Strömungen in der Natur und der Technik ist aber die kritische *Re*-Zahl durchaus überschritten, so daß dem Praktiker die turbulenten Strömungen natürlich erscheinen; leider ist ihre Berechnung jedoch äußerst schwierig. Wie schon in 1.4.6 gezeigt, ist hier die Bewegung der einzelnen Flüssigkeitsteilchen auch bei stationären Randbedingungen stets instationär und unregelmäßig, daher in den Einzelheiten nicht deterministisch bestimmbar. Meßbar sind nur noch statistische Größen, insbesondere Mittelwerte der Geschwindigkeit und deren Schwankungen, der Druck- und Flüssigkeitskräfte usw.

Bei Messungen in turbulenten Strömungen wird fast immer das zeitliche Mittel am festen Ort (im Eulerschen Koordinatensystem) gebildet, insbesondere dann, wenn man bei stationären Randbedingungen eine im Mittel stationäre Strömung erwartet. Die momentane Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$ setzt sich dann aus der stationären mittleren Geschwindigkeit $\bar{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{r})$ und der Schwankung $\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r},t)$ zusammen:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t) = \bar{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r},t)\,, \tag{3.178}$$

wobei

$$\bar{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{1}{T}\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)\,\mathrm{d}t \tag{3.179}$$

und natürlich

$$\overline{\boldsymbol{v}'}(\boldsymbol{r},t) = 0\,.$$

Das Zeitintervall T ist dabei groß gegen die Schwankungsperiode zu wählen, so daß $\bar{\boldsymbol{v}}$ unabhängig von T ist.

Wenn sich auch diese mittlere Strömung langsam zeitlich verändert, so muß andererseits T als klein gegenüber solchen Zeitintervallen angenommen werden, in denen sich die Randbedingungen merklich ändern. Ist es nicht möglich, ein Intervall T zwischen diesen beiden Grenzen anzunehmen, so kann sich eine gewisse Willkür in der Bezeichnung Mittelwert und Turbulenz ergeben. Offensichtlich hängt z. B. in der Meteorologie die mittlere Windstärke und -richtung am gleichen Ort davon ab, ob das Mittel über wenige Minuten, eine Stunde oder gar über einen Tag gebildet wird.

Andererseits muß man räumliche Mittelwerte untersuchen, wenn der Bewegungszustand in einem großen Gebiet gleichförmig ist, also statistisch homogen, aber zeitlich abklingend. Eine derartige Strömung hat man etwa in einem Gefäß mit ruhender Flüssigkeit, durch die ein Sieb gezogen worden ist. Im Ganzen bleibt hier die Flüssigkeit am selben Ort; die einzelnen Flüssigkeitsteilchen machen jedoch schwankende Bewegungen, die im statistischen Mittel unabhängig vom Ort und sogar von der Rich-

tung sind (homogene und isotrope Turbulenz). Allmählich erlischt diese Turbulenz infolge der Zähigkeit; ihre kinetische Energie ist dann in Wärmeenergie dissipiert.

Die allgemeinste Mittelbildung besteht darin, daß man denselben Versuch sehr oft wiederholt und die jeweils erhaltenen Meßgrößen mittelt. Das ist das statistische Scharmittel, über das die Theorie Aussagen machen kann. Es stimmt mit dem zeitlichen Mittel für im Mittel stationäre Strömungen überein, wenn die Schwankungen Zufallsfunktionen der Zeit sind.

In einer inkompressiblen Flüssigkeit, die wir hier stets voraussetzen wollen, lautet die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \operatorname{div} \overline{\boldsymbol{v}} + \operatorname{div} \boldsymbol{v}' = 0 .$$

Bildet man das zeitliche Mittel hiervon, so kann man die Reihenfolge der voneinander unabhängigen räumlichen Ableitungen und zeitlichen Integration vertauschen:

$$\operatorname{div} \overline{\boldsymbol{v}} = \operatorname{div} \overline{\boldsymbol{v}} + \operatorname{div} \overline{\boldsymbol{v}'} = 0;$$

es gilt also in jedem Zeitpunkt sowohl für die mittlere Bewegung $\operatorname{div} \overline{\boldsymbol{v}} = 0$, wie für die Schwankungen $\operatorname{div} \boldsymbol{v}' = 0$.

Kinematisch kann man sich die Schwankungsbewegung am besten veranschaulichen als ein unregelmäßiges Gemisch von großen und kleinen Wirbeln, die dauernd entstehen und wieder erlöschen; die Bezeichnung Turbulenz ist daher sehr zutreffend. Für die räumliche Struktur der Turbulenz ist nun vor allem der Längenmaßstab kennzeichnend. Für die größten Wirbel sind die Abmessungen der Turbulenzerzeuger maßgebend, also z. B. die Maschenweite eines Siebs für die Strömung dahinter oder der Rohrradius für die Rohrströmung. Interessanter ist es, daß es eine untere Grenze für die kleinsten Wirbel gibt. Je kleiner ein Wirbel ist, um so steiler wird der Geschwindigkeitsanstieg im Kern, bis schließlich die Zähigkeitskräfte die der Trägheit überwiegen. In diesen kleinsten Wirbeln herrscht also Laminarströmung, und es wird in ihnen infolge der Zähigkeit Energie dissipiert.

Dagegen überwiegen die Trägheitskräfte bei den großen Wirbeln, und diese enthalten auch den größten Anteil der kinetischen Energie der Schwankungsbewegung, die der mittleren Hauptbewegung entzogen wird. Die großen Wirbel zerfallen nun in immer kleinere, bis schließlich in den kleinsten Wirbeln die kinetische Energie in Wärme umgewandelt wird. Die Zähigkeit spielt also im wesentlichen nur in der Feinstruktur der Turbulenz am Ende dieses kaskadenartigen Wirbelzerfalls eine Rolle; die mittlere Strömung, aber auch die Intensität der Schwankungen sind dagegen unabhängig von der *Re*-Zahl, wenn diese nur groß genug ist, um überhaupt zwischen großen und kleinen Wirbeln innerhalb der turbulenten Nebenbewegung unterscheiden zu können.

Die großen Wirbel bewirken die auffälligste Eigenschaft turbulenter Strömungen, nämlich den starken Austausch von Impuls, Wärme und Stoffeigenschaften quer zur Hauptströmung. Die Wirkungen dieses Austausches sind um einige Größenordnungen stärker als die der Zähigkeit und der Diffusion in einer Laminarströmung, die nur von molekularen Austauschvorgängen verursacht sind. Das ist z. B. in dem klassischen Versuch von O. Reynolds zu sehen, bei dem in eine Rohrströmung gefärbte Flüssigkeit durch ein dünnes Röhrchen eingeführt wird. In langsamer laminarer Strömung entsteht ein langer Farbfaden, der nur ganz allmählich durch molekulare Diffusion etwas breiter wird.

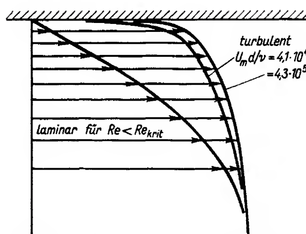


Fig. 89. Laminare und turbulente Geschwindigkeitsverteilung im Rohr

In schneller, turbulenter Strömung wird jedoch sehr bald hinter der Zuleitungsstelle die austretende gefärbte Flüssigkeit praktisch über den ganzen Rohrquerschnitt gleichmäßig verteilt. Daß auch der Impulsaustausch wesentlich größer ist als in Laminarströmung, kann man aus der stark vergleichmäßigten Verteilung der mittleren Geschwindigkeit erkennen (vgl. Fig. 89). Das Umschlagen der laminaren Strömung in die turbulente Strömungsform erfolgt bei einer um so größeren kritischen Re-Zahl, je weniger Störungen die Anlaufströmung selbst enthält. Man findet im Versuch $Re_{\text{krit}} = U_{\text{m}} d/\nu = 2300$ bis etwa 20000, mit U_{m} = mittlere Durchflußgeschwindigkeit.

3.7.2. Ebene Scherströmungen. Theoretisch am einfachsten ist natürlich der Fall homogener und isotroper Turbulenz. Praktisch wichtiger sind jedoch Scherströmungen, in denen die mittlere Strömung grenzschichtähnlichen Charakter hat und die Turbulenz anisotrop und inhomogen ist. Da für solche Strömungen die ersten halbempirischen Theorien entwickelt wurden, wollen wir auch hiervon ausgehen. Es sei also die mittlere Strömung stationär und eben: $\bar{w} = 0$, $\partial\bar{u}/\partial z = \partial\bar{v}/\partial z = 0$. Die turbulente Nebenbewegung ist zwar auch in diesem Fall dreidimensional: $w' \neq 0$, doch sind ihre Mittelwerte unabhängig von z, also z. B. $\partial(\overline{u'w'})/\partial z = 0$ usw. Denkt man sich nun das momentane Geschwindigkeits- und Druckfeld zerlegt in den zeitlichen Mittelwert und dessen Schwankung $u + u'$, $v + v'$, $0 + w'$, $p + p'$, wobei wir den Querstrich für die Mittelwerte der Hauptströmung wieder weglassen, so gibt die Navier-Stokessche Gleichung:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u + u')^2 + \frac{\partial}{\partial y}(u + u')(v + v') = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial x}(p + p') + \nu\Delta(u + u') \tag{3.180}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u + u')(v + v') + \frac{\partial}{\partial y}(v + v')^2 = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial y}(p + p') + \nu\Delta(v + v') \tag{3.181}$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u + u')w' + \frac{\partial}{\partial y}(v + v')w' = \nu\Delta w'. \tag{3.182}$$

Bildet man von diesen Gleichungen mit Reynolds das zeitliche Mittel, so ist zu beachten, daß zwar definitionsgemäß z. B. $\overline{u'} = 0$ gilt, es aber möglich ist, daß

$\overline{u'^2} \neq 0$, $\overline{u'v'} \neq 0$ und auch $\overline{u'^3} \neq 0$ oder $\overline{u'^2v'} \neq 0$. Es wird somit:

$$\frac{\partial}{\partial x} u^2 + \frac{\partial}{\partial y} uv = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta u - \frac{\partial}{\partial x}\overline{u'^2} - \frac{\partial}{\partial y}\overline{u'v'} \tag{3.183}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} uv + \frac{\partial}{\partial y} v^2 = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta v - \frac{\partial}{\partial x}\overline{u'v'} - \frac{\partial}{\partial y}\overline{v'^2}. \tag{3.184}$$

Die dritte Gleichung gibt dann keine Aussage mehr. Wegen der Unabhängigkeit der Hauptbewegung und des Turbulenzzustandes von der z-Koordinate muß nämlich z. B. $\overline{u'w'} = -\overline{u'w'}$ gelten, denn bei einer Umkehrung der z-Richtung würde w' das Vorzeichen wechseln; d. h. aber es muß $\overline{u'w'} = 0$ und ebenso $\overline{v'w'} = 0$ sein.

Die beiden ersten Gleichungen unterscheiden sich von denen für laminare Strömung nur durch die letzten Glieder, die sich aus den Impulsbeträgen der Schwankungsbewegung in x- und y-Richtung ergeben. Man kann sie offenbar als Volumenkräfte deuten, die zu dem Reynoldsschen (symmetrischen) Spannungstensor

$$-\varrho\begin{pmatrix}\overline{u'^2} & \overline{u'v'}\\ \overline{u'v'} & \overline{v'^2}\end{pmatrix} \tag{3.185}$$

gehören. Das Hauptproblem besteht nun darin, den Zusammenhang zwischen diesen scheinbaren Spannungen und der mittleren Hauptbewegung zu finden, falls eine eindeutige Abhängigkeit überhaupt besteht.

Multipliziert man die in jedem Zeitpunkt gültige Navier-Stokes-Gleichung – in vektorieller Form geschrieben – mit $\boldsymbol{v}$ oder $\boldsymbol{v}'$ und bildet dann erst zeitliche Mittelwerte, so erhält man zwei Energiesätze. Schließlich kann man beliebig viele solcher Gleichungen gewinnen durch Multiplikation von Potenzen aus $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{v}'$ und zeitlicher Mittelbildung. Man erhält jedoch auch immer mehr neue Unbekannte. So entstehen z. B. bei der Multiplikation mit $\boldsymbol{v}'$ – infolge der nichtlinearen Glieder der ursprünglichen Gleichung – sowohl Doppelprodukte wie $\overline{u'v'}$ und $\overline{p'u'}$ wie auch Tripelprodukte wie $\overline{u'^3}$ und $\overline{u'v'^2}$. Aus endlich vielen solcher Gleichungen läßt sich daher eine Theorie nicht aufbauen, ohne gewisse, mehr oder weniger willkürliche zusätzliche Annahmen einzuführen.

Betrachtet man speziell grenzschichtähnliche Strömungen, bei denen die Änderungen der mittleren Strömung in x-Richtung eine Größenordnung kleiner sind als in y-Richtung, so lassen sich die obigen Gleichungen vereinfachen. Wie in 3.5 kann man die Größenordnung der einzelnen Glieder abschätzen, mit $Re = UL/\nu \to \infty$. In der Impulsgleichung für die y-Richtung bleiben dann als vielleicht große Glieder nur übrig

$$0 = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\overline{v'^2}, \quad \text{da} \quad \frac{\partial}{\partial x}\overline{u'v'} \ll \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y}. \tag{3.186}$$

Daraus folgt
$$p + \varrho\overline{v'^2} = p_0(x); \tag{3.187}$$

$p_0(x)$ ist der statische Druck an den Grenzschichträndern, wo $\overline{v'^2} \to 0$ bei turbulenzfreier Außenströmung. Die erste Gleichung kann man damit schreiben

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho} \frac{dp_0}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau}{\varrho} - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'^2} - \overline{v'^2}), \tag{3.188}$$

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \varrho \overline{u'v'}. \tag{3.189}$$

Da sich experimentell die Schwankungsamplituden als klein gegen die mittlere Geschwindigkeit erweisen, kann man in dieser turbulenten Grenzschichtgleichung in guter Näherung $p = p_0(x)$ setzen und das Glied $\partial(\overline{u'^2} - \overline{v'^2})/\partial x$ vernachlässigen. Die Übereinstimmung mit der Grenzschichtgleichung in 3.5 ist dann vollkommen; Impuls- und Energiesatz in der allgemeinen Form des Abschn. 3.5.6 gelten auch jetzt noch, τ bedeutet aber die turbulente Schubspannung nach Gl. (3.189) und nicht mehr die laminare nach Newtons Ansatz.

3.7.3. Der Prandtlsche Mischungsweg. In voll ausgebildeter turbulenter Strömung kann das laminare Glied in Gl. (3.189) durchaus vernachlässigt werden, und es bleibt allein die Reynoldssche Spannung

$$\tau = -\varrho \overline{u'v'}. \tag{3.190}$$

Sie ist damit zwar als Ergebnis des Impulsaustausches infolge der Schwankungsbewegung gedeutet; unbekannt geblieben ist aber ihre Abhängigkeit von der mittleren Strömung. Hierfür stellten in den 20er und 30er Jahren G. I. Taylor, von Kármán und L. Prandtl halbempirische Theorien auf, von denen Prandtls Mischungsweg-Ansatz am bekanntesten wurde. Denn die Anwendung auf die Rohr- und Plattenströmung sowie auf den turbulenten Freistrahl führte zu Endresultaten, die bei passender Wahl freibleibender Zahlenkonstanten mit Versuchsergebnissen überraschend gut übereinstimmten. Wenn man auch später die gleichen Resultate durch formale dimensionsanalytische Betrachtungen vorsichtiger und korrekter abzuleiten lernte, ist der Ansatz wegen seiner kühnen Einfachheit noch immer interessant.

In einer mittleren Parallelströmung mit veränderlicher Geschwindigkeit $u(y)$ stellt sich Prandtl momentan einheitlich bewegende Flüssigkeitsballen (Durchmesser l) vor, die relativ zur umgebenden Flüssigkeit einen zu l proportionalen Weg zurücklegen können, bevor sie sich mit der Umgebung vermischen und ihre Individualität verlieren. Wenn nun ein solcher Turbulenzballen in der Schicht y durch eine zufällige Querschwankung v' auf eine neue mittlere Stromlinie $y \pm l$ befördert wird, so hat er gegenüber seiner neuen Umgebung einen Geschwindigkeits-Unter- oder -Überschuß in x-Richtung von der Größenordnung $\Delta u = u' = \mp l \, \partial u/\partial y$. Da bei diesen Bewegungen die Kontinuität der Flüssigkeit in jedem Zeitpunkt gewahrt bleibt, sind zugehörige u' und v'-Schwankungen von der gleichen Größenordnung: $u' \sim v'$. Dies führt zu dem Ansatz:

$$\tau = -\varrho \overline{u'v'} = \varrho l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \cdot \frac{\partial u}{\partial y}; \tag{3.191}$$

dabei sind alle Proportionalitätskonstanten in dem sowieso unbekannten Mischungsweg l enthalten, und das Betragszeichen soll sicherstellen, daß τ

und $\partial u/\partial y$ das gleiche Vorzeichen haben. Die unbekannte turbulente Schubspannung, die zunächst als Schwankungsprodukt gedeutet wurde, ist jetzt mit der mittleren Strömung verknüpft, allerdings durch Einführen einer unbekannten neuen Länge l. Man hofft jedoch für diese anschauliche Länge, die nicht mehr vom Geschwindigkeitsprofil abhängen soll, im Einzelfall einen ergänzenden Ansatz machen zu können.

Betrachten wir zunächst die turbulente Reibungsschicht längs einer ebenen Platte bei konstantem Druck. Die einzige ausgezeichnete Länge innerhalb dieser Schicht ist der Wandabstand y. Beschränkt man sich nun mit Prandtl auf einen wandnahen Teil, in dem das Abklingen der Schubspannung nach außen hin noch so klein ist, daß man $\tau \approx \text{const} \approx \tau_0$ (Wandschubspannung) setzen kann, so ist der einfache Ansatz

$$l = \varkappa \cdot y\,, \quad \varkappa = \text{Zahlenkonstante} \tag{3.192}$$

naheliegend. Denn mit $y \to 0$ muß auch der Mischungsweg $l \to 0$ verschwinden; an der Wand selbst sind ja Querschwankungen überhaupt unmöglich. Aus

$$\tau = \varrho\, \varkappa^2 y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \text{const} = \tau_0 \tag{3.193}$$

folgt aber sofort

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{y}{y_0}\,, \quad \text{mit} \quad u_* \equiv \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}\,. \tag{3.194}$$

Dabei ist u_*, die sogenannte Schubspannungsgeschwindigkeit, eine bequeme Rechengröße, y_0 eine Integrationskonstante und $\varkappa$ eine experimentell zu ermittelnde Konstante $\varkappa \approx 0{,}40$. In unmittelbarer Wandnähe ($y \approx 0$) versagt die Formel freilich; dort ist aber auch Turbulenz sowieso kinematisch unmöglich, und die Flüssigkeit kann nur in Schichten parallel zur Wand gleiten. Dieses sehr dünne Gebiet direkt an der Wand nennt man laminare Unterschicht.

Ein logarithmisches Geschwindigkeitsprofil findet man nun tatsächlich bei der turbulenten Plattenströmung im größten Teil der Schicht sowohl bei glatter wie bei rauher Wand. Auch der natürliche Wind über dem Erdboden steigt in dieser Weise mit der Höhe an, und zwar bis zu mehreren Hundert Metern; seine Richtung ändert sich allerdings wegen der Coriolis-Kräfte mit der Höhe (im Uhrzeigersinn auf der Nordhalbkugel). In glatten und rauhen Rohren wird dieses logarithmische Gesetz, abgesehen von der unmittelbaren Wandnähe, sogar praktisch bis zur Rohrmitte bestätigt, obwohl dort die Schubspannung auch bei turbulenter Strömung linear auf den Wert null abfällt.

Auch die turbulente Vermischung eines Freistrahls mit der umgebenden ruhenden Flüssigkeit läßt sich rechnerisch mit der Mischungsweghypothese verfolgen. Man setzt dazu l proportional der jeweiligen Strahlbreite b an: $l = \alpha b$ und findet experimentell für die Konstante α etwa den Wert 1/8.

3.7.4. Rohrströmung. In ausgebildeter, turbulenter Strömung in einem geraden Kreisrohr ist sowohl die mittlere Geschwindigkeit wie die turbulente Schwankungsbewegung unabhängig von der Entfernung x vom Einlauf; nur der statische Druck nimmt linear mit x ab. Führt man Zylinderkoordinaten x, r und φ mit den Geschwindigkeitskomponenten $u + u'$, $v + v'$, $w + w'$ ein, so

entsprechen diese den folgenden Größen im Anhang: z, r, φ, w, u, v. Aus den dort angegebenen Navier-Stokesschen Gleichungen folgen – wie in 3.7.2 – durch zeitliche Mittelung die Reynolds-Gleichungen, wobei hier speziell gilt $v = w = 0$, $\partial v/\partial t = 0$ und $\partial/\partial\varphi = 0$. Man erhält so:

$$0 = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\nu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} - r\,\overline{u'v'}\right) \tag{3.195}$$

$$0 = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\,r\,\overline{v'^2} + \frac{\overline{w'^2}}{r} \tag{3.196}$$

$$0 = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\overline{v'w'} - 2\frac{\overline{v'w'}}{r}\;. \tag{3.197}$$

Integriert man die dritte Gleichung und führt die Randbedingung $\overline{v'w'} = 0$ an der Rohrwand $r = R$ ein, so folgt $\overline{v'w'} = 0$ für alle r. Differenziert man die zweite Gleichung nach x, so wird $\partial^2 p/\partial r\,\partial x = 0$; d. h. der Druckabfall $\partial p/\partial x$ ist unabhängig von r. Man kann also über r integrieren:

$$0 = -\frac{r^2}{2\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + r\left(\nu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} - \overline{u'v'}\right) + F_1(x) \tag{3.198}$$

$$0 = -\frac{p}{\varrho} - \overline{v'^2} + \int\limits_R^r (\overline{w'^2} - \overline{v'^2})\frac{\mathrm{d}r}{r} + F_2(x)\,, \tag{3.199}$$

mit den Randbedingungen

bei $r = 0$ (Rohrmitte) $\overline{u'v'} = 0, \quad \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = 0$

$r = R$ (Wand) $\overline{u'v'} = 0, \quad \nu\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = \dfrac{-\tau_0}{\varrho} = -u_*^2\,, \quad \overline{v'^2} = 0\,.$

Da $\partial p/\partial x$ unabhängig von r ist, muß $F_1(x) = 0$ gesetzt werden. Die erste Gleichung gibt daher für $r = R$ ebenso wie für laminare Strömung (Gl. 1.63):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\tau_0}{R} = -\frac{2\varrho}{R}u_*^2 \tag{3.200}$$

oder integriert
$$\frac{p - p_0}{\varrho} = -\frac{2u_*^2}{R}(x - x_0) + F_3(r)\,; \tag{3.201}$$

p_0 ist der Wanddruck an der Stelle x_0.

Vergleicht man mit der zweiten Gleichung, so erhält man $F_3(r)$, also das Druckprofil über einen Rohrquerschnitt ausgedrückt durch die Querschwankungen v' und w':

$$\frac{p - p_0}{\varrho} + \frac{2u_*^2}{R}(x - x_0) = -\overline{v'^2} + \int\limits_R^r (\overline{w'^2} - \overline{v'^2})\frac{\mathrm{d}r}{r}\,. \tag{3.202}$$

Für Laminarströmung verschwindet die rechte Gleichungsseite natürlich.

Die turbulenten Schwankungen im Rohr wurden mit Hitzdrähten zuerst von H. Reichardt[1]) vermessen, später ausführlicher und genauer von J. Laufer[2]); die einfachsten seiner Ergebnisse sind in den Fig. 90 dargestellt. Die Schwankungen betragen danach höchstens einige Prozent der mittleren Geschwindigkeit. Mißt man daher – wie früher allein üblich – die letztere mit einem Pitot-Rohr, so bleibt der Fehler gewöhnlich klein; denn der damit bestimmte Staudruck $(\varrho/2)\,(u^2+\overline{u'^2}+\overline{v'^2}+\overline{w'^2})$ ist dann nur wenig größer als der gesuchte Staudruck der mittleren Strömung allein $(\varrho/2)\,u^2$. Fig. 90 zeigt ferner, daß der turbulente Anteil zur Schubspannung $-\varrho\overline{u'v'}$ den laminaren Anteil $\mu\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}y$ meistens weit überwiegt; die gestrichelte Gerade entspricht der gesamten Schubspannung $\tau=\tau_0 r/R$. Das Glied $\mu\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}y$ spielt also nur in Wandnähe eine Rolle, wo die Geschwindigkeit weit schneller ansteigt, als es in laminarer Strömung der Fall wäre.

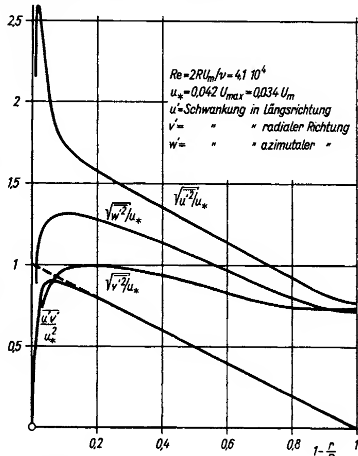


Fig. 90.
Stärke der turbulenten Schwankungen im Rohr

In diesem wandnahen Gebiet spielt sich auch praktisch fast die ganze Energiedissipation ab. Die Energiegleichung für die mittlere (hier eindimensionale) Bewegung erhält man einfach durch Multiplikation der Gleichung (3.198) mit $(\varrho/r)\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}r$; zusammen mit Gl. (3.200) wird dann:

$$-\frac{r}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}=\varrho\overline{u'v'}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}-\mu\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)^2=\frac{r}{R}\varrho u_*^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}. \qquad (3.203)$$

Die am Volumenelement in der Zeiteinheit geleistete Druckarbeit wird danach zum Teil als Deformationsarbeit der turbulenten Schubspannung an der mittleren Bewegung verbraucht (analog zum Ausdruck $\tau_{xy}\partial u/\partial y$ in 3.1) und zum andern Teil als laminare Dissipation der Hauptströmung direkt in Wärme umgewandelt. Dimensionslos wird die Gleichung nach Division mit $\varrho u_*^4/\nu$; führt man noch einen dimensionslosen Wandabstand y_* ein:

$$y_*=\frac{u_*}{\nu}(R-r),$$

so wird

$$\frac{r}{R}\frac{\mathrm{d}(u/u_*)}{\mathrm{d}y_*}=\frac{\overline{u'v'}}{u_*^2}\frac{\mathrm{d}(u/u_*)}{\mathrm{d}y_*}+\left(\frac{\mathrm{d}(u/u_*)}{\mathrm{d}y_*}\right)^2=m+n. \qquad (3.204)$$

[1]) ZAMM **13** (1933). [2]) NACA, T. R. **1174** (1955).

Die beiden Glieder m und n dieser Gleichung sind nach den Messungen von Laufer in Fig. 91 über y_* aufgetragen und gelten für die beiden Rohr-Re-Zahlen $U_{\max} \cdot 2R/\nu = 5 \cdot 10^4$ und $5 \cdot 10^5$, mit $u_*/U_{\max} = 0{,}0422$ und $0{,}0354$. Es entsprechen also z. B. dem Wert $y_* = 10$ die Wandabstände $(R - r)/R = 0{,}0095$ und $0{,}0113$. In Wandabständen dieser extrem kleinen Größenordnung findet also nicht nur die direkte Dissipation der mittleren Bewegung (n) statt, sondern auch die Produktion von Turbulenz. Denn m stellt ja die Energie dar, die der Hauptbewegung entzogen und zunächst in kinetische Energie der Geschwindigkeitsschwankungen umgewandelt wird, die schließlich auch in Wärmeenergie übergeht.

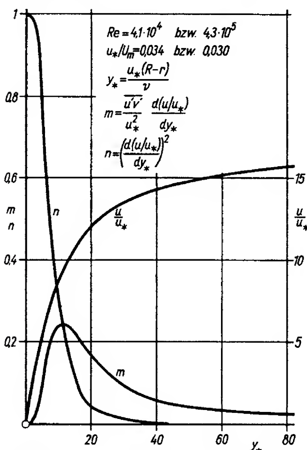


Fig. 91.
Produktion von Turbulenz (m) und Dissipation der mittleren Bewegung (n) in Wandnähe, nach J. Laufer

In welch komplizierter Weise die der Hauptbewegung entzogene Energie nun ihrerseits seitlich diffundiert, mit turbulenter Druckenergie ausgetauscht und in den kleinsten Wirbeln durch die Zähigkeit in Wärme dissipiert wird, hat J. Laufer ebenfalls experimentell untersucht. Da der überwiegende Hauptanteil an turbulenter Energie sowohl produziert wie dissipiert wird in einer sehr dünnen wandnahen Schicht, in der die gesamte Schubspannung nur unwesentlich von der an der Wand τ_0 abweicht, kann man annehmen, daß die Strömung dort nur von den örtlichen Größen τ_0, ϱ und ν abhängt. Aus diesen kann man dimensionsanalytisch nur den einen Geschwindigkeitsmaßstab $u_* = \sqrt{\tau_0/\varrho}$ bilden und damit dann den oben schon benutzten dimensionslosen Wandabstand y_*. Für die Hauptbewegung ergibt sich so ein Wandgesetz

$$\frac{u}{u_*} = f(y_*), \quad y_* = u_* \frac{R - r}{\nu} . \tag{3.205}$$

In der laminaren Unterschicht, in der $-\varrho\overline{u'v'} \ll \mu \mathrm{d}u/\mathrm{d}r$ gilt, muß die noch unbestimmte Funktion f speziell von der Form sein:

$$\frac{u}{u_*} = f(y_*) = y_*, \tag{3.206}$$

damit $-\mu \mathrm{d}u/\mathrm{d}r = \tau_0 = \varrho u_*^2$ zutrifft.

Andererseits ist im Rohrmittengebiet um die Rohrachse der direkte Einfluß der Zähigkeit vernachlässigbar; die Strömung wird hier allein von der turbulenten Schubspannung beherrscht, die ihrerseits im Gleichgewicht mit dem

Druckabfall $\partial p/\partial x$ steht. Wenn man nun eine charakteristische Länge L wählt, so ist damit auch ein Geschwindigkeitsmaßstab $\sqrt{\frac{L}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}}$ festgelegt. Eine passende Länge ist offenbar der Rohrradius R; die zugehörige charakteristische Geschwindigkeit ist dann wieder u_* wegen $\partial p/\partial x = -2\varrho u_*^2/R$ nach Gl. (3.200). Wie groß auch das betrachtete Mittengebiet sein mag, das Gebiet in Wandnähe gehört sicher nicht mehr dazu. Es ist deshalb nicht sinnvoll, hier nach der mittleren Geschwindigkeit u relativ zur Wand zu fragen, sondern nur nach Geschwindigkeitsdifferenzen, etwa gegen die Geschwindigkeit $U_{\max}$ in Rohrmitte. Auf Grund solcher Überlegungen stellte v. Kármán (1929) das Rohrmittengesetz auf:

$$\frac{U_{\max} - u}{u_*} = g\left(\frac{r}{R}\right). \tag{3.207}$$

Messungen bei verschiedenen Re-Zahlen bestätigen sowohl das obige Wand- wie dieses Mittengesetz, und zwar überlappen sich die beiden Gültigkeitsbereiche. Aus diesem experimentellen Befund schloß C. B. Millikan[1]) weiter, daß mindestens im gemeinsamen Gültigkeitsbereich beide Funktionen f und g Logarithmen sein müssen. Wenn dort nämlich gleichzeitig gilt:

$$u = u_* f(y_*) = U_{\max} - u_* g\left(\frac{r}{R}\right), \quad \text{mit} \quad y_* = u_* \frac{R-r}{\nu}, \tag{3.208}$$

so folgt daraus für

$$\begin{aligned} \frac{R-r}{u_*}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} &= -(R-r)\frac{u_*}{\nu}\cdot f' = -y_*\frac{\mathrm{d}f(y_*)}{\mathrm{d}y_*} \\ &= -\left(1-\frac{r}{R}\right)\frac{\mathrm{d}g(r/R)}{\mathrm{d}(r/R)} = \text{const}. \end{aligned} \tag{3.209}$$

Bezeichnet man diese Konstante mit $1/\varkappa$, so wird also:

$$\begin{aligned} f &= \frac{u}{u_*} = \frac{1}{\varkappa}\ln y_* + c_1 \\ g &= \frac{U_{\max}-u}{u_*} = -\frac{1}{\varkappa}\ln\left(1-\frac{r}{R}\right) + c_2. \end{aligned} \tag{3.210}$$

Fig. 92 zeigt die experimentelle Bestätigung des logarithmischen Wandgesetzes, das fast im ganzen Rohrquerschnitt gilt außer direkt an der Wand und im Rohrzentrum. Noch genauer ist das allgemeine Mittengesetz, das erst in der laminaren Unterschicht ungültig wird. (Dieses Gesetz gilt übrigens auch noch für rauhe Rohre, da die Rauhigkeit der Rohrwände nur den Wert von u_*, nicht aber den Funktionsverlauf $g(r/R)$ gegenüber dem im glatten Rohr ändert.) Auf Grund dieses Mittengesetzes und Messungen von J. Nikuradse[2]) berechnete L. Prandtl[3]) den Druckverlust in glatten Rohren zu

$$1/\sqrt{\lambda} = 2{,}0 \log\left(Re\sqrt{\lambda}\right) - 0{,}8\ . \tag{3.211}$$

---

[1]) Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech., Cambridge, Mass. 1938.
[2]) VDI-Fo.Heft 356, 1932.
[3]) VDI-Zeitschr. 77 (1933).

Dabei ist λ die Druckverlustziffer

$$\lambda = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{2R}{\frac{\varrho}{2} U_M^2} ; \tag{3.212}$$

U_M ist die mittlere Durchflußgeschwindigkeit und $Re = 2R\,U_M/\nu >$ etwa 4000.

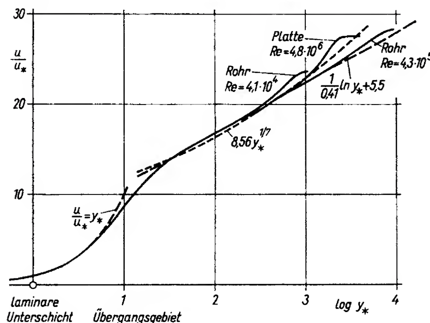


Fig. 92. Turbulente Geschwindigkeitsprofile in halblogarithmischer Auftragung

Rechnerisch handlicher als das logarithmische Gesetz ist eine Potenzformel für die mittlere Geschwindigkeit:

$$\frac{u}{U_{\max}} \approx \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n}, \tag{3.213}$$

mit $n = 6$ bis 10 im Re-Zahlbereich von $4 \cdot 10^3$ bis $3 \cdot 10^6$. So ist z. B. in Fig. 92 die Näherung gezeichnet:

$$\frac{u}{u_*} = 8{,}56\, y_*^{1/7} \qquad \text{für} \qquad Re = \text{etwa } 10^5 . \tag{3.214}$$

Auf die Rohrmitte $r = 0$ angewandt folgt daraus:

$$\frac{U_{\max}}{u_*} = 8{,}56 \cdot \left(\frac{u_* R}{\nu}\right)^{1/7} . \tag{3.215}$$

Hieraus, sowie aus der Definition der Durchflußgeschwindigkeit U_M:

$$\frac{U_M}{U_{\max}} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \frac{u}{U_{\max}}\, 2\pi r dr = 0{,}817 \quad \text{für} \quad n = 7 , \tag{3.216}$$

erhält man

$$\frac{U_M}{u_*} = 7{,}00 \left(\frac{u_* R}{\nu}\right)^{1/7} . \tag{3.217}$$

Nach u_* aufgelöst ergibt sich für die Wandschubspannung:

$$\tau_0 = \varrho u_*^2 = 0{,}0395\, \varrho\, U_M^2\, Re^{-1/4}, \quad \text{mit} \quad Re = 2RU_M/\nu. \tag{3.218}$$

Diese hängt mit der Druckverlustziffer λ wie folgt zusammen:

$$\tau_0 = \frac{R}{2}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\lambda}{8}\varrho U_M^2, \quad \text{da} \quad \lambda = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{2R}{\varrho U_M^2/2}, \tag{3.219}$$

so daß $\lambda = 0{,}316\, Re^{-1/4}$. (3.220)

Diese Formel für das glatte Rohr, die etwa bis $Re = 2 \cdot 10^5$ für praktische Zwecke völlig ausreicht, hat H. Blasius[1]) auf Grund von Druckverlustmessungen verschiedener Autoren aufgestellt.

3.7.5. Plattenströmung. Schon die einfachste turbulente Reibungsschicht, nämlich die längs einer ebenen Platte mit konstanter Außengeschwindigkeit U, ist noch schwerer zu berechnen als die Rohrströmung. Denn die mittlere Strömung ist hier nicht streng parallel, – die Grenzschichtdicke $\delta(x)$ wächst mit der Entfernung x von der Plattenvorderkante an – und es kann deshalb über das Abklingen der Schubspannung $\tau(y)$ von der Wand nach außen nichts ausgesagt werden, außer daß direkt an der Wand (innerhalb der laminaren Unterschicht) gelten muß

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial y}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y=0} = 0\,. \tag{3.221}$$

Näherungsweise kann man jedoch nach L. Prandtl[2]) die Plattenreibungsschicht mit Hilfe der Annahme berechnen, daß nicht nur das Wandgesetz, sondern praktisch auch das ganze Geschwindigkeitsprofil an der Platte das gleiche ist wie im Rohr; bei jeder Rücklage x soll dabei die jeweilige Grenzschichtdicke δ dem Rohrradius R und U der Geschwindigkeit $U_{\max}$ im Rohr entsprechen. Man übernimmt also das 1/7-Potenzgesetz für die Geschwindigkeit

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^{1/n} \quad \text{mit } n = 7, \tag{3.222}$$

und setzt nach Gl. (3.218) für die Wandschubspannung

$$\tau_0 = 0{,}0395 \cdot \varrho (0{,}817\, U_{\max})^2 \left(U_{\max}\frac{2R}{\nu}\right)^{-1/4} = 0{,}0222\, \varrho U_{\max}^2 \left(\frac{U\delta}{\nu}\right)^{-1/4}. \tag{3.223}$$

Wie am Schluß von 3.7.2 gezeigt, gilt der Impulssatz ebenso wie für laminare Grenzschichten (vgl. 3.5.6):

$$\frac{\tau_0}{\varrho U^2} = \frac{\mathrm{d}\delta_2}{\mathrm{d}x}\,. \tag{3.224}$$

Die Impulsverlustdicke δ_2 ist nun für das Potenzprofil

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right)\mathrm{d}y = \frac{n}{(n+1)(n+2)}\,\delta = \frac{7}{72}\,\delta \quad \text{für } n = 7\,. \tag{3.225}$$

[1]) Forschungsarb. des VDI 131, 1913.

[2]) Ergebn. d. Aer. Vers.-Anst. Göttingen **3** (1927).

Aus (3.223) bis (3.225) erhält man eine Gleichung für $\delta(x)$:

$$\frac{7}{72}\frac{d\delta}{dx} = 0{,}0222\left(\frac{U\delta}{\nu}\right)^{-1/4} \tag{3.226}$$

mit der Lösung

$$\delta = 0{,}37\,x\left(\frac{Ux}{\nu}\right)^{-1/5} \quad \text{und} \quad \delta_2 = 0{,}036\,x\left(\frac{Ux}{\nu}\right)^{-1/5}. \tag{3.227}$$

Der Widerstandsbeiwert (wie in 3.5.1) der Platte wird damit

$$c_f = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\tau_0}{\varrho U^2/2}\,dx = 2\,\frac{\delta_2}{x} = 0{,}072\left(\frac{Ux}{\nu}\right)^{-1/5}. \tag{3.228}$$

Messungen des Plattenwiderstandes bei nicht zu hohen *Re*-Zahlen werden allerdings besser angenähert durch

$$c_f = 0{,}074\left(\frac{Ux}{\nu}\right)^{-1/5} - \frac{A}{Ux/\nu}; \tag{3.229}$$

das Korrekturglied berücksichtigt, daß in Wirklichkeit die Reibungsschicht nicht schon von der Plattenvorderkante $x = 0$ ab turbulent ist, sondern bis zum Umschlagspunkt laminar bleibt. Je nach der Turbulenzfreiheit der Außenströmung wird $(Ux/\nu)_{\text{krit}} = 3 \cdot 10^5$, $5 \cdot 10^5$ und 10^6 und entsprechend die rein empirische Korrekturzahl $A = 1050$, 1700 und 3300.

Genauer, aber rechnerisch komplizierter, ist die Übertragung des logarithmischen Wandgesetzes vom Rohr auf die Platte. Das Ergebnis kann durch die Formel von Prandtl-Schlichting näherungsweise dargestellt werden

$$c_f = 0{,}455\left(\log\frac{Ux}{\nu}\right)^{-2{,}58} - \frac{A}{(Ux/\nu)}. \tag{3.230}$$

Diese Gleichung ist mit $A = 1700$ in Fig. 93 graphisch dargestellt.

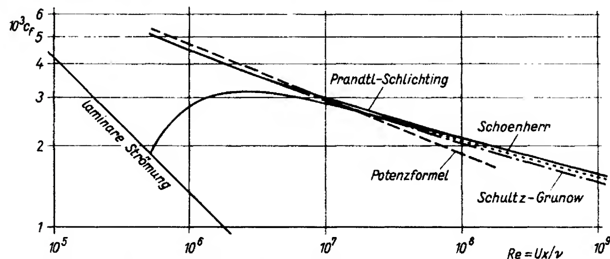


Fig. 93. Widerstandsbeiwert der längsangeströmten Platte

Auf Grund des Kármánschen Mittengesetzes übertrug K. Schoenherr[1]) Rohrmessungen auf die Platte und fand

$$\sqrt{c_f} = \frac{0{,}242}{\log(c_f \cdot Ux/\nu)}\,; \tag{3.231}$$

diese Formel bürgerte sich besonders bei den Schiffbauern ein.

Prandtl und Schlichting[2]) übertrugen auch noch die Messungen von J. Nikuradse[3]) an rauhen Rohren auf die Plattenströmung. Als definierbare und experimentell reproduzierbare Rauhigkeit wurde Sand so dicht als möglich auf die Rohrwände geklebt. Für das Wandgesetz hat man dann eine neue charakteristische Länge in dem Korndurchmesser k oder eine dimensionslose zusätzliche Kennzahl ku_*/ν. Bei einer Platte mit gleichbleibender Rauhigkeit ist diese Zahl nicht konstant, sondern wird stromabwärts ebenso wie u_* kleiner. Im allgemeinen bewirkt eine Rauhigkeit eine Widerstandsvergrößerung; wenn jedoch alle Rauhigkeitselemente innerhalb der laminaren Unterschicht bleiben (vgl. Fig. 92), d. h. wenn $ku_*/\nu <$ etwa 5 gilt, werden in dieser laminaren zähen Strömung alle Störungen gedämpft und wirkungslos gemacht. Eine weitere Glättung der Wandfläche bringt dann keine Widerstandsverringerung hervor, weshalb man eine Wand oder ein Rohr mit $ku_*/\nu < 5$ als hydraulisch glatt bezeichnet. Für die Platte kann man mit den obigen Formeln diese Bedingung umrechnen:

$$\frac{u_*}{U} = \sqrt{\frac{\mathrm{d}\delta_2}{\mathrm{d}x}} = 0{,}17\left(\frac{Ux}{\nu}\right)^{-1/10},$$

$$\frac{kU}{\nu} < 30\left(\frac{Ux}{\nu}\right)^{1/10} \approx 100 \text{ bis } 200 \text{ für } \frac{Ux}{\nu} = 10^5 \text{ bis über } 10^8\,.$$

Bei technischen Strömungen ist diese Forderung meist schwer zu erfüllen. Ein hydraulisch glattes Segelflugzeug herzustellen, wäre technisch möglich, ein Schiff ist aber stets rauh. Das Rauhigkeitsproblem hat große praktische Bedeutung, ist aber auch empirisch und phänomenologisch schwer zugänglich.

Wenn auch das logarithmische Wandgesetz mit praktisch gleichen Zahlenkonstanten sowohl im Rohr wie an der Platte gilt, sind doch die Abweichungen davon im äußeren Teil der Plattengrenzschicht stets größer als im Mittengebiet des Rohrs (vgl. Fig. 92). F. Schultz-Grunow[4]) untersuchte deshalb die Plattenströmung ohne Bezugnahme auf Messungen im Rohr und fand ein Außengesetz bestätigt;

$$\frac{U-u}{u_*} = g\left(\frac{y}{\delta}\right). \tag{3.232}$$

Dimensionsanalytisch läßt sich dieses allerdings nicht so gut begründen wie das analoge Mittengesetz im Rohr. Denn man müßte dazu voraussetzen können, daß im äußeren Teil der Grenzschicht, in dem die Zähigkeit keinen direkten Einfluß mehr hat, die Schubspannungsverteilung bei verschiedenen Rücklagen x affin und durch die Maßstäbe τ_0 und δ eindeutig bestimmt ist, was hier sicher nur angenähert zutrifft.

---

[1]) Trans. Soc. Nav. Arch. Mar. Eng. **40** (1932).
[2]) Werft, Reederei, Hafen 1934.
[3]) VDI-Fo-Heft 361 (1933).
[4]) Luftfahrtforschung **17** (1940).

Die Verschiedenheit der Geschwindigkeitsprofile im äußeren Teil der Plattengrenzschicht und im Mittengebiet im Rohr läßt sich daraus erklären, daß am Grenzschichtrand nicht nur die Schubspannung, sondern auch die turbulenten Bewegungen selbst abklingen, während in Rohrmitte $\sqrt{\overline{u'^2}} \approx \sqrt{\overline{v'^2}} \approx \sqrt{\overline{w'^2}} \approx 0{,}75u_*$ gemessen wird. Macht man nun auch die Potentialströmung außerhalb der Plattengrenzschicht künstlich stark turbulent, so wird die Abweichung des Geschwindigkeitsprofils vom logarithmischen Gesetz viel kleiner und entspricht der der Rohrströmung besser. Die beiden turbulenten Nebenbewegungen unterscheiden sich aber nicht nur quantitativ, sondern auch grundlegend durch die Intermittenz der Turbulenz in der äußeren Hälfte der Plattengrenzschicht. Diese Erscheinung entdeckte S. Corrsin[1]). Am freien Rand einer turbulenten Strömung wie eines Freistrahls, eines Nachlaufs oder einer Grenzschicht zeigt das Oszillogramm eines Hitzdrahts nur zu gewissen Zeiten hochfrequente turbulente Schwankungen an, während in den dazwischen liegenden Zeitintervallen die Strömung am Ort des Hitzdrahts völlig ungestört und drehungsfrei verläuft. Als Intermittenzfaktor γ bezeichnet man nun den Bruchteil der Zeit, während dessen die Strömung am Beobachtungsort turbulent ist. In der Plattengrenzschicht ist z. B. im wandnahen Teil mit $0 < y/\delta < 0{,}4$ $\gamma = 1$, zwischen $y/\delta = 0{,}4$ und 1,2 klingt γ dagegen auf den Wert Null ab. Mit wachsendem Wandabstand bleiben die momentanen turbulenten Schwankungen zwar etwa gleich stark, sie treten aber immer seltener auf. Man nimmt daher an, daß dort eine Grenzfläche zwischen turbulent und nicht-turbulent strömender Flüssigkeit besteht, die von der Hauptbewegung mitgenommen wird und ihre unregelmäßige Form dauernd ändert. Je mehr die Meßmethoden verfeinert werden, um so schwieriger erscheint es also, turbulente Strömungen rein theoretisch beschreiben zu können.

Von großer praktischer Bedeutung ist die Berechnung turbulenter Reibungsschichten an beliebigen Körpern, d. h. also bei Druckabfall oder -anstieg, und die Vorausberechnung der turbulenten Ablösestelle. Die in solchen Reibungsschichten gemessenen mittleren Geschwindigkeitsprofile lassen sich – passend dimensionslos gemacht – näherungsweise als einparametrige Schar ordnen. Mit Hilfe des Impuls- und Energiesatzes kann man dann Näherungsverfahren – analog denen für laminare Grenzschichten (vgl. 3.5.6) – aufstellen, allerdings nur mit zusätzlichen Hypothesen über die Schubspannungsverteilung.

3.7.6. Freie Turbulenz. In der Grenzschicht eines umströmten Körpers entsteht Turbulenz vor allem dicht an der Wand, wo der Quergradient der mittleren Geschwindigkeit noch sehr groß ist. Wenn die Grenzschicht sich vom Körper abgelöst hat, entsteht in der freien Flüssigkeit ebenfalls ein Gebiet großer Quergradienten an der Grenze des Totwassers mit der umgebenden schnell strömenden Flüssigkeit. Der umgekehrte Fall ergibt sich beim Ausblasen in ruhende (gleichartige) Flüssigkeit, etwa aus einem Loch in einer senkrechten Wand wie in Fig. 94. Bei nicht allzu kleiner *Re*-Zahl der Lochströmung entsteht dann ein Strahl, der sich mit der Umgebung turbulent vermischt. Es wird durch turbulenten Impulsaustausch einerseits ruhende Flüssigkeit in Strahlrichtung mitgerissen, andererseits breitet sich der Strahl aus und verliert an Geschwindigkeit. Offenbar kann man diese Strömung nicht potentialtheoretisch durch eine

[1]) NACA Wartime Rep. ACR 3L23 (1943).

Quelle in der Mündung beschreiben; wird jedoch Flüssigkeit in das Loch angesaugt, so fließt sie wie zu einer Senke von allen Seiten gleichmäßig hin. Der Unterschied erklärt sich daraus, daß beim Ausblasen die im Lochkanal entstandene Grenzschicht an der Mündung abreißt wie in einem Diffusor mit zu großem Öffnungswinkel. Die in der Grenzschicht erzeugte Rotation ist zunächst in der Wirbelschicht konzentriert, die den Strahlrand bildet. Diese Schicht ist aber sehr instabil und zerfällt schnell in die ungeordneten Wirbel der turbulenten Nebenbewegung.

Bei solchen von Wänden nicht mehr begrenzten Strömungen spricht man von freier Turbulenz. Sie haben wieder grenzschichtähnlichen Charakter insofern, als in diesen fast parallelen Strömungen Änderungen von Strömungsgrößen quer zur Hauptströmungsrichtung viel größer sind als in dieser. Solange die turbulenten Querschwankungen der Geschwindigkeit klein sind $\left(\sqrt{\overline{v'^2}}/u \ll 1\right)$, ist der statische Druck im Strahl oder Nachlaufgebiet gleich dem der Außenströmung, d. h. also in erster Näherung überall gleich groß.

Die Berechnung der mittleren Strömung gelang zunächst mit Hilfe des Mischungswegansatzes [L. Prandtl[1]), W. Tollmien[2])]. Die Hauptmerkmale von Strömungen mit freier Turbulenz lassen sich freilich auch schon durch Ähnlichkeitsüberlegungen ableiten, und zur besseren Annäherung von Einzelheiten erwies sich ein älterer phänomenologischer Ansatz von J. Boussinesq (1897) als geeigneter. Darin wird einfach – analog zum Newtonschen Ansatz – auch für die turbulente Schubspannung gesetzt:

$$\tau = \varrho\,\varepsilon\,\frac{\partial u}{\partial y}\,. \tag{3.233}$$

Dabei ist aber die Wirbelzähigkeit ε keine Materialkonstante wie die kinematische Zähigkeit ν, denn sie kann noch vom Ort abhängen; gewöhnlich ist sie um mehrere Zehnerpotenzen größer als ν. Besonders die Meteorologen arbeiten viel mit dem Begriff Austausch $A = \varrho\varepsilon$.

Der Mischungswegansatz mit $\varepsilon = l^2|\partial u/\partial y|$ ist nun für differentielle Vermischungsvorgänge durch kleine Wirbel geeignet, wie etwa bei der Wandturbulenz. Bei der freien Turbulenz wird die Vermischung aber vor allem von Wirbeln von der Größenordnung der Breite b des Nachlaufs oder Freistrahls bewirkt. Deshalb schlug Prandtl[3]) hierfür den Ansatz vor:

$$\varepsilon = \mathrm{Zahl}\cdot b\cdot(u_{\max} - u_{\min})\,. \tag{3.234}$$

Nach H. Görtler[3]) kann man in der Tat hiermit Versuchsergebnisse besser annähern als mit dem Mischungswegansatz, außer am Strahlrand, wo ε – zumindest im hier allein betrachteten zeitlichen Mittel – eigentlich verschwinden müßte.

Durch diese Modellvorstellungen wird allerdings der eigentliche Mechanismus der Turbulenz kaum berührt; dieser kann immer noch nur durch Ausmessen der verschiedensten Schwankungskorrelationen näher studiert, aber nicht theoretisch ausreichend erfaßt werden. Wegen ihrer praktischen Bedeutung sollen trotzdem im folgenden am Beispiel des Freistrahls die Bruttowirkungen freier Turbulenz beschrieben werden.

---

[1]) Verh. 2. intern. Kongr. techn. Mech. Zürich 1926.
[2]) ZAMM **6** (1926).
[3]) ZAMM **22** (1942).

3.7.6.1. Ebener Freistrahl, Bei genügend großer *Re*-Zahl ($U_0 d/\nu$) der Strömung im Ausblasspalt (Spaltweite d, Ausblasgeschwindigkeit U_0) beobachtet man, daß – etwa von Entfernungen von $x/d > 10$ ab – die Haupt- und Nebenbewegung ähnlich sind. Das heißt, daß z. B. für die mittlere Geschwindigkeit u, sowie für die turbulente Schubspannung gilt:

$$u = u_1 f'(\eta), \quad -\overline{u'v'} = u_1^2 g(\eta), \quad \text{mit} \quad \eta = y/b\,, \tag{3.235}$$

wobei der Maßstab u_1 für Geschwindigkeiten und der für Längen b nur noch von der Entfernung x vom Spalt abhängen:

$$u_1 = u_1(x)\,, \quad b = b(x)\,. \tag{3.236}$$

Wegen des grenzschichtähnlichen Charakters der Strömung und der Unabhängigkeit des Drucks vom Ort lautet die Impulsgleichung in x-Richtung einfach

$$\frac{\partial}{\partial x} u^2 + \frac{\partial}{\partial y} uv = -\frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'}\,. \tag{3.237}$$

Die Impulsgleichung für die y-Richtung handelt nur von kleinen, vernachlässigbaren Größen. Die Kontinuitätsgleichung werde erfüllt durch Einführen der Stromfunktion

$$\Psi = u_1 b f(\eta)\,, \tag{3.238}$$

so daß

$$u = \Psi_y = u_1 f'(\eta)$$

und

$$v = -\Psi_x = -u_1' b f - u_1 b' f + u_1 b' \eta f'\,.$$

Setzt man dies in die Impulsgleichung (3.237) ein, so wird

$$\frac{u_1' b}{u_1}(f'^2 - ff'') - b' f f'' = g'. \tag{3.239}$$

Aus der beobachteten Ähnlichkeit der Strömung folgt daher, daß

$$b' = \beta = \text{const}, \quad \text{oder} \quad b = \beta x \quad \text{und} \quad u_1 \sim x^n\,. \tag{3.240}$$

Da keine äußeren Kräfte wirken, muß der Gesamtimpuls des Strahls in jeder Ebene $x = \text{const}$ gleich sein:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varrho u^2 \,\mathrm{d}y = \text{const} = \varrho u_1^2 b \int_{-\infty}^{+\infty} f'^2 \,\mathrm{d}\eta\,. \tag{3.241}$$

(Dies folgt natürlich auch durch Integration der Gleichung (3.237) über y, da $\overline{u'v'}$ an den Strahlrändern verschwindet.)
Wegen $u_1^2 b = \text{const}$ muß nun $u_1 \sim x^{-1/2}$ gelten und daher

$$\frac{u_1' b}{u_1} = -\frac{\beta}{2}\,. \tag{3.242}$$

Identifiziert man nun u_1 mit der Geschwindigkeit auf der Strahlachse, so lautet hier der Ansatz für die Wirbelzähigkeit

$$\varepsilon = \varepsilon_0 b u_1\,, \quad \varepsilon_0 = \text{Zahl} \tag{3.243}$$

und es wird

$$\frac{-\overline{u'v'}}{u_1^2} = g(\eta) = \varepsilon \frac{(\partial u/\partial y)}{u_1^2} = \varepsilon_0 f'' ; \qquad (3.244)$$

somit wird Gl. (3.239) jetzt

$$f'^2 + ff'' + \frac{2\varepsilon_0}{\beta} f''' = 0 = \frac{1}{2}(f^2)'' + \frac{2\varepsilon_0}{\beta} f''' . \qquad (3.245)$$

Zweimalige Integration führt auf

$$f' = -\frac{\beta}{4\varepsilon_0} f^2 + 1 ;$$

dabei ist schon berücksichtigt, daß auf der Achse $\eta = 0$ $f' = 1$ gelten muß und zweckmäßigerweise $f = 0$ (d. h. $\Psi = 0$) gesetzt wird, sowie daß $f' = u/u_1$ aus Symmetriegründen eine gerade Funktion von η sein soll. Schließlich wird

$$f = \sqrt{4\varepsilon_0/\beta} \tanh \frac{\eta}{\sqrt{4\varepsilon_0/\beta}} , \qquad (3.246)$$

$$\frac{u}{u_1} = f' = 1/\cosh^2\left(\frac{\eta}{\sqrt{4\varepsilon_0/\beta}}\right) \qquad (3.247)$$

$$\frac{v}{u_1} = \beta\left[\eta \cosh^{-2}\left(\frac{\eta}{\sqrt{4\varepsilon_0/\beta}}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{4\varepsilon_0/\beta} \tanh\left(\frac{\eta}{\sqrt{4\varepsilon_0/\beta}}\right)\right] . \qquad (3.248)$$

Wählt man als Längenmaßstab b jetzt den Abstand von der Achse, bei dem die Geschwindigkeit auf den halben Achsenwert abgefallen ist, so wird für $\eta = y/b = 1$

$$\frac{u}{u_1} = 0{,}5 = \frac{1}{\cosh^2(1/\sqrt{4\varepsilon_0/\beta})} , \qquad (3.249)$$

also $4\varepsilon_0/\beta = 1{,}29$.

Nach Messungen von H. Reichardt[1]) ist $\beta \approx 0{,}114$, woraus $\varepsilon_0 = 0{,}037$ folgt. Die Geschwindigkeit auf der Achse u_1 kann aus dem Gesamtimpuls I berechnet werden:

$$I = \varrho u_1^2 b \int_{-\infty}^{\infty +} f'^2 \, d\eta = \frac{4}{3}\sqrt{4\varepsilon_0/\beta}\, \varrho u_1^2 b = \varrho U_0^2 d ; \qquad (3.250)$$

es wird also

$$\frac{u_1}{U_0} = 2{,}40\left(\frac{x}{d}\right)^{-1/2} \quad \text{für} \quad \frac{x}{d} > 10 \text{ (nach Versuchen).} \qquad (3.251)$$

Beim Ausblasen warmer Luft findet man übrigens, daß das Temperaturprofil immer breiter ist als die Geschwindigkeitsprofile beim gleichen Abstand vom Strahlanfang; Wärme wird also stärker turbulent ausgetauscht als Impuls.

[1]) VDI-Fo.-Heft 414, 1942.

3.7.6.2. Runder Freistrahl. Für den kreisförmigen Freistrahl wird der Gesamtimpuls

$$\frac{I}{\varrho} = \frac{\pi}{4} d^2 U_0^2 = \int_0^\infty u^2 \, 2\pi r \, dr = 2\pi u_1^2 b^2 \int_0^\infty \left(\frac{u}{u_1}\right)^2 \eta \, d\eta = \text{const} \quad \text{mit} \quad \eta = \frac{r}{b}. \quad (3.252)$$

Wegen $b = \beta x$ wird hier $u_1 \sim 1/x$, statt $u_1 \sim 1/\sqrt{x}$ im ebenen Strahl. Die Wirbelzähigkeit wird somit hier

$$\varepsilon = \text{Zahl}\, b u_1 = \text{const}; \quad (3.253)$$

sie ist demnach auch von x unabhängig und überall im Strahl konstant, während im ebenen Fall ε mit $\sqrt{x}$ anwächst. Man kann daher hier die Lösung für den laminaren Freistrahl von *H.* Schlichting[1]) übernehmen, wenn man in diese an Stelle der kinematischen Zähigkeit ν die Wirbelzähligkeit ε einsetzt. Die Grundgleichungen sind hier

$$r\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r}(r v) = 0 \quad (1.28)$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\varepsilon}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right). \quad (3.254)$$

Setzt man die Stromfunktion dimensionsrichtig folgendermaßen an:

$$\Psi = \varepsilon x f(\eta), \quad \text{mit} \quad \eta = \frac{r}{b} = \frac{r}{\beta x}, \quad (3.255)$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\varepsilon}{\beta^2 x}\frac{f'}{\eta} \\ v &= -\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{\beta x}\left(f' - \frac{f}{\eta}\right). \end{aligned}\right\} \quad (3.256)$$

Damit gibt die Impulsgleichung

$$\frac{ff'}{\eta^2} - \frac{f'^2}{\eta} - \frac{ff''}{\eta} = \frac{d}{d\eta}\left(f'' - \frac{f'}{\eta}\right), \quad (3.257)$$

oder einmal integriert:

$$-\frac{ff'}{\eta} = f'' - \frac{f'}{\eta}.$$

Die Randbedingungen auf der Achse $\eta = 0$ sind: $\Psi = v = 0$, also $f = f' = 0$; aus Symmetriegründen muß u, also f'/η, gerade sein und deshalb auch f gerade in η. Die zugehörige Lösung ist mit einer freien Integrationskonstante γ:

$$f = \frac{4\eta^2}{\gamma + \eta^2}, \qquad u = \frac{8\varepsilon\gamma}{\beta^2 x(\gamma + \eta^2)^2}. \quad (3.258)$$

Nun soll wieder bei $r = b = \beta x$ die Geschwindigkeit auf den halben Wert der Achsengeschwindigkeit $u_1(r = 0)$ abgefallen sein, woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{u_1}{2} &= u(\eta = 1) = \frac{4\varepsilon}{\beta^2\gamma x} = \frac{8\varepsilon\gamma}{\beta^2\gamma x(\gamma + 1)^2}. \\ u_1(\eta = 0) &= \frac{8\varepsilon}{\beta^2\gamma x} \end{aligned}\right\} \quad (3.259)$$

[1]) ZAMM **13** (1933).

Hierfür muß also $\gamma = 1 + \sqrt{2} = 2{,}414$ gesetzt werden.
Der Gesamtimpuls ist jetzt

$$\frac{I}{\varrho} = \frac{\pi}{4} d^2 U_0^2 = \int_0^\infty u^2 2\pi r \, dr = \frac{64\pi}{3\gamma} \frac{\varepsilon^2}{\beta^2} = \frac{27{,}8\varepsilon^2}{\beta^2}. \tag{3.260}$$

Eliminiert man hierin ε durch u_1, so erhält man

$$\frac{u_1}{U_0} = \sqrt{\frac{3}{4\beta^2\gamma}} \frac{d}{x}. \tag{3.261}$$

Nach den Messungen von H. Reichardt gilt nun für den runden turbulenten Strahl

$$\beta = 0{,}0848 = \frac{b}{x}, \tag{3.262}$$

so daß $u_1/U_0 = 6{,}57\, d/x$ für $x/d > 10$, vgl. Fig. 94.

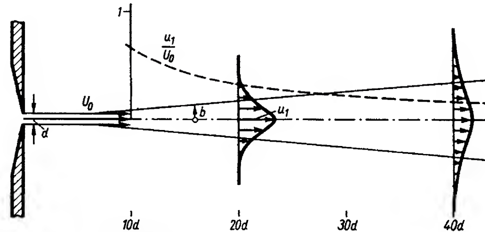


Fig. 94. Runder Freistrahl

Zum Vergleich mit dem ebenen Freistrahl sei noch die Zahlenkonstante ε_0 im Ansatz für die Wirbelzähigkeit berechnet:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 u_1 b = \frac{8\varepsilon\varepsilon_0}{\beta\gamma}, \qquad \varepsilon_0 = \frac{\beta\gamma}{8} = 0{,}0256; \tag{3.263}$$

befriedigender wäre es natürlich, wenn sich etwa wieder $\varepsilon_0 = 0{,}037$ ergeben hätte. Die hier konstante Wirbelzähigkeit ε selbst ergibt sich zu

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot 6{,}57\, U_0 d \frac{b}{x} = 0{,}0143\, U_0 d, \qquad \text{oder} \qquad \frac{\varepsilon}{\nu} = 0{,}0143 \left(\frac{U_0 d}{\nu}\right). \tag{3.264}$$

So wird z. B. bei einem runden Freistrahl, den man durch Ausblasen durch den Mund leicht erzeugen kann, mit $d = 1$ cm, $U = 10$ m/s, $\nu = 1/7$ cm²/s: $Re = 7000$ und $\varepsilon/\nu = 100$.

3.7.7. Grundbegriffe der statistischen Theorie. In den beschriebenen Beispielen turbulenter Strömungen wurde versucht, durch einen hypothetischen Ansatz über den Zusammenhang zwischen turbulenter Schubspannung und mittlerer

Bewegung, diese möglichst direkt zu berechnen. Das Ziel der von G. I. Taylor[1]) begründeten statistischen Turbulenztheorie ist es jedoch, zunächst die turbulente Nebenbewegung in allen statistisch erfaßbaren Einzelheiten zu untersuchen, wodurch überhaupt erst eine rationelle Theorie auch der mittleren Strömung ermöglicht werden soll. Die Hauptschwierigkeiten dieser Theorie ergeben sich daraus, daß jede turbulente Nebenbewegung dreidimensional ist, daß die Navier-Stokesschen Grundgleichungen nicht-linear sind, und daß die turbulenten Strömungen – wegen der Energiedissipation – nicht-konservative Systeme darstellen. Nur in Ausnahmefällen hat daher diese Theorie zu Ergebnissen geführt, die auch den Praktiker interessieren. Trotzdem besteht kein Zweifel daran, daß nur der damit angefangene Weg zu einer rationellen Turbulenztheorie führen kann. Es sollen daher im folgenden noch einige dieser statistischen Grundbegriffe erläutert werden.

Wir beschränken uns auf den denkbar einfachsten Spezialfall, den der homogenen und isotropen Turbulenz. Verwirklicht ist dieser Fall z. B. im Luftstrom eines Windkanals nach dem Passieren des letzten Siebes. Die mittlere Geschwindigkeit U ist konstant, und die turbulente Nebenbewegung ist an allen Orten und sogar nach allen Richtungen im statistischen Mittel gleich, so daß z. B. $\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2}$. Allerdings kann hier diese Isotropie nicht im strengen Sinn gelten; denn die Turbulenz klingt wegen der Dissipation mit der Zeit, d. h. also in Strömungsrichtung, langsam ab, wodurch diese Richtung etwas ausgezeichnet wird.

Bemerkung: Da es sich im folgenden fast nur noch um die turbulenten Schwankungen handelt, sollen diese nicht mehr mit u', v', w', sondern mit u, v, w bezeichnet werden. Dagegen soll jetzt u' die Wurzel aus dem Mittelwert des Schwankungsquadrats bedeuten, die bisher $\sqrt{\overline{u'^2}}$ lautete.

3.7.7.1. Doppelkorrelation. Während der Mittelwert $u' = v' = w'$ die Stärke der isotropen Schwankungen kennzeichnet, erhält man gewisse Aussagen über die räumlichen Abmessungen der Turbulenz aus der Korrelation zwischen den momentanen Schwankungen der Geschwindigkeitskomponenten in zwei benachbarten Punkten A und B wie z. B.

$$\left.\begin{aligned} R_{1,1} &= \frac{\overline{u_A\, u_B}}{\sqrt{\overline{u_A^2}}\cdot\sqrt{\overline{u_B^2}}} \\ \text{oder}\qquad R_{1,2} &= \frac{\overline{u_A\, v_B}}{\sqrt{\overline{u_A^2}}\cdot\sqrt{\overline{v_B^2}}} \end{aligned}\right\} \qquad (3.265)$$

Offenbar würde – unabhängig vom Abstand r zwischen A und B – $R = \pm 1$, wenn die u_A, u_B usw. nicht statistisch unregelmäßige Schwankungen wären, sondern z. B. Geschwindigkeiten einer nicht-turbulenten stationären Strömung, die in jedem Zeitpunkt determiniert und einander proportional sind. Für unregelmäßig schwankende Zufallsfunktionen $u_A(t)$ usw. wird jedoch R um so

[1]) Proc. Roy. Soc. London A 1935, 1936, 1937, 1938; vgl. auch Batchelor, G. K., The Theory of Homogeneous Turbulence, Cambridge 1953 und Townsend, A. A., The Structure of Turbulent Shear Flow, Cambridge 1956.

kleiner, je schwächer der Zusammenhang zwischen u_A und u_B, bzw. v_B ist; deshalb wird $R \to 0$ für $r = |AB| \to \infty$, während der Maximalwert $R = 1$ nur bei $B \to A$ oder $r \to 0$ erreicht wird.

Bei isotroper Turbulenz verschwinden nun mehrere der obigen Korrelationskoeffizienten. Legt man die willkürlichen Koordinatenrichtungen so, daß AB und B auf der x-Achse liegen, wie in Fig. 95, so muß aus Symmetriegründen z. B.

$$\overline{u_A v_B} = \overline{u_A w_B} = \overline{v_A u_B} = 0 \quad (3.266)$$

gelten; denn bei einer Umkehrung z. B. der y-Richtung würde aus $\overline{u_A v_B}$ entstehen $-\overline{u_A v_B}$, was wegen der Richtungsunabhängigkeit gleich $\overline{u_A v_B}$ sein muß. Nicht verschwindende Korrelationen sind hier nur möglich zwischen folgenden Schwankungskomponenten:

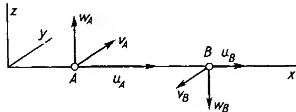


Fig. 95.
Schwankungen der Geschwindigkeitskomponenten in zwei benachbarten Punkten

$$\overline{u_A u_B} = \overline{u'^2} \cdot f(r) \quad (3.267)$$

und

$$\overline{v_A v_B} = \overline{w_A w_B} = \overline{u'^2} \cdot g(r)\,. \quad (3.268)$$

Dabei ist der Abstand $|AB|$ nach wie vor mit r bezeichnet, um die beliebige Richtung von AB anzudeuten; $f(r)$ ist allgemein die Längs- und $g(r)$ die Querkorrelation.

Zwischen den beiden Korrelationsfunktionen f und g besteht außerdem noch eine Verknüpfung infolge der Kontinuitätsbedingung, wie v. Kármán[1]) zuerst zeigte, und die nach Prandtl folgendermaßen abgeleitet werden kann. Man betrachtet dazu die Durchströmung einer halbkugelförmigen Kontrollfläche wie in Fig. 96. Infolge der turbulenten Schwankungen strömt in die Durchmesserebene die Menge $\varrho \int_0^{r_1} u' g(r) 2\pi r \, dr$ ein. Aus der Halbkugel heraus fließt die gleich große Menge

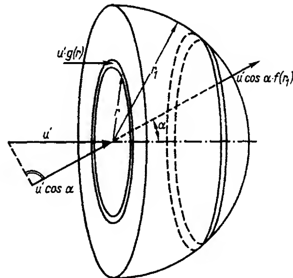


Fig. 96.
Zur Kontinuitätsgleichung ausgedrückt durch Doppelkorrelationen bei isotroper Turbulenz

$$\varrho \int_0^{\pi/2} u' \cos\alpha\, f(r_1)\, 2\pi r_1 \sin\alpha\, r_1 \, d\alpha = \pi \varrho u' f(r_1) r_1^2 = \varrho \int_0^{r_1} u' g(r)\, 2\pi r \, dr\,. \quad (3.269)$$

Differenziert man diese Gleichung nach r_1 und schreibt dann für r_1 allgemein r, so wird

$$g(r) = f(r) + \frac{r}{2} f'(r) \quad \text{mit} \quad f'(r) = \partial f/\partial r\,. \quad (3.270)$$

[1]) J. Aeron. Sci. 4 (1937).

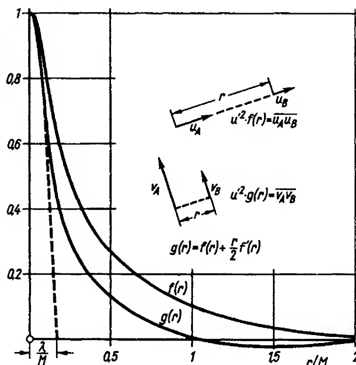


Fig. 97.
Längs- und Querkorrelation (f und g) in isotroper Turbulenz hinter einem Gitter (Maschenweite M)

Fig. 97 zeigt ein Beispiel solcher gemessener f- und g-Funktionen hinter einem Gitter mit der Maschenweite M. Als charakteristischen Längs- oder Quermaßstab der Turbulenz kann man nun ansehen:

$$L_1 = \int_0^\infty f(r)\,\mathrm{d}r$$

oder

$$L_2 = \int_0^\infty g(r)\,\mathrm{d}r = \frac{L_1}{2}$$

wegen (3.270).

Wollte man die Mischungstheorie so buchstäblich nehmen, wie sie es nie gemeint war, so wäre die Korrelationskurve ein Rechteck, dessen Breite der Größe der Turbulenzballen entspräche. Aus der Kontinuitätsgleichung (3.270) folgt übrigens noch

$$\int_0^\infty r\,g\,\mathrm{d}r = \int_0^\infty r\,f\,\mathrm{d}r + \int_0^\infty \frac{r^2}{2} f'\,\mathrm{d}r = \left[\frac{r^2}{2} f\right]_0^\infty = 0\,, \tag{3.271}$$

da f für $r \to \infty$ stärker verschwindet als r^2 ansteigt. $g(r)$ muß also irgendwo auch negative Werte annehmen, wenn die Turbulenz isotrop ist.

Für die Dissipation in den kleinsten Wirbeln ist der Verlauf von f und g bei $r \approx 0$ kennzeichnend. Um dort f in eine Taylor-Reihe zu entwickeln, berechnen wir die Ableitungen von f im Punkt A, für $x_A = \text{const}$ und $x_B - x_A = x \to 0$:

$$u'^2 f(x) = \overline{u(x_A)\cdot u(x_A + x)}\,, \quad u'^2 f(0) = \overline{u(x_A)^2} = u'^2$$

$$u'^2 f'(0) = u'^2 (f_x)_{x=0} = \overline{u(x_A)\cdot u_x(x_A)} = \frac{1}{2}\,(\overline{u(x_A)^2})_x = 0$$

$$u'^2 f''(0) = u'^2 (f_{xx})_{x=0} = \overline{u(x_A)\cdot u_{xx}(x_A)}$$

$$= \overline{u(x_A)\,u_x(x_A)}_x - \overline{u_x(x_A)^2} = -\,\overline{u_x(x_A)^2}\,;$$

dabei wurde die Unabhängigkeit der Turbulenz vom Ort schon berücksichtigt: $\overline{u^2} = \text{const}$, $\overline{u u_x} = 0$ usw. Somit wird für die in $x = r$ geraden Funktionen f und g:

$$f = 1 - \frac{r^2}{2\lambda^2}\ldots, \quad g = 1 - \frac{r^2}{\lambda^2}\ldots \quad \text{für} \quad r \approx 0\,, \tag{3.272}$$

owbei $\frac{u'^2}{\lambda^2} = -u'^2 f''(0) = \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2}$

$$= -\frac{u'^2}{2} g''(0) = \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} = \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2} = \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} \text{ usw.} \qquad (3.273)$$

Man kann daher die Dissipation in isotroper Turbulenz allein durch u' und λ ausdrücken. Schreibt man abkürzend für die Gradienten $\partial u_i/\partial x_k$ mit $i, k = 1, 2, 3$, aber $i \neq k$, wobei z. B. $\partial v/\partial z = \partial u_2/\partial x_3$ ist, so gilt bei isotroper Turbulenz:

$$a_1 = \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2}, \quad a_2 = \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2} \quad \text{mit} \quad a_1 = \frac{1}{2} a_2 . \qquad (3.274)$$

Bezeichnet man noch die Mittelwerte folgender Produkte mit a_3:

$$a_3 = \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}}, \qquad (3.275)$$

so wird hier die Dissipationsfunktion (vgl. 3.1) einfach:

$$\frac{D}{\mu} = 6(a_1 + a_2 + a_3) . \qquad (3.276)$$

Für a_3 erhält man eine Bestimmungsgleichung aus dem Ausdruck für $\overline{\Delta p}$, der hier verschwinden muß; nach 3.2 wird:

$$-\frac{\overline{\Delta p}}{\varrho} = 0 = 3a_1 + 6a_3 , \quad \text{also} \quad a_1 = -2a_3 . \qquad (3.277)$$

Folglich wird die Dissipation:

$$\frac{D}{\mu} = 15a_1 = 7{,}5a_2 = 15\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} = 7{,}5\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} = \frac{15u'^2}{\lambda^2} . \qquad (3.278)$$

In der Auftragung der Längskorrelation f über r kann λ veranschaulicht werden als Nullpunktsabstand, in dem die Schmiegungsparabel an die Querkorrelation g bei $r = 0$ die Abszisse schneidet (vgl. Fig. 97).

Die Dissipation verringert die kinetische Energie der Nebenbewegung:

$$E = \frac{\varrho}{2}(u'^2 + v'^2 + w'^2) = \frac{3}{2}\varrho u'^2 , \qquad (3.279)$$

so daß $-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\frac{3}{2}\varrho \frac{\mathrm{d}u'^2}{\mathrm{d}t} = D = \frac{15\mu u'^2}{\lambda^2}$, (3.280)

oder $\frac{1}{u'^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u'^2 = -\frac{10\nu}{\lambda^2}$. (3.281)

Für das zeitliche Abklingen der Turbulenz gibt also die Größe $\lambda^2/10\nu$ einen Zeitmaßstab, der allerdings ebenso wie u'^2 und λ noch von der Zeit abhängen kann. Geht man von dem mitbewegten System auf ein raumfestes über, so wird mit $\mathrm{d}/\mathrm{d}t = U\,\mathrm{d}/\mathrm{d}x$

$$\frac{1}{u'^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u'^2 = -\frac{10\nu}{U\lambda^2} . \qquad (3.282)$$

Experimentell findet man für gewöhnliche Siebe (Maschenweite M) etwa bis $x/M = 100$ oder 200

$$\frac{u'^2}{U^2} = \frac{cM}{x - x_0} \quad \text{mit} \quad x_0 \approx 10,\ c \approx 130\,, \tag{3.283}$$

woraus folgt:

$$\frac{\lambda}{(x - x_0)} = \sqrt{\frac{10\nu}{U(x - x_0)}}\,. \tag{3.284}$$

Bei großen Abständen x/M klingt die Turbulenz jedoch schneller ab.

3.7.7.2. Tripelkorrelationen. Die Reynoldsschen Spannungen sind Korrelationen zweier Geschwindigkeitsschwankungen in einem Punkt; speziell in isotroper Turbulenz sind sie einfach $\overline{u^2} = \overline{v^2} = \overline{w^2} = u'^2$ und $\overline{uv} = \overline{vw} = \overline{uw} = 0$. Doppelkorrelationen an zwei Punkten ergeben gewisse räumliche Merkmale des Turbulenzfeldes; weitere sind zu erwarten, wenn man die dreifachen Korrelationen der Schwankungen an drei verschiedenen Punkten studierte, die allerdings kinematisch wesentlich komplizierter sind. Wenn von den drei Punkten zwei zusammenfallen, erhält man die Tripelkorrelationen an zwei Punkten A und B, die von Kármán und L. Howarth[1]) einführten. Zerlegt man die betrachteten Schwankungen wieder in Komponenten in Richtung von $AB = r$ und senkrecht dazu, so verschwinden in isotroper Turbulenz die meisten von den 27 Produkten $\overline{(u_i)_A (u_i)_A (u_k)_B}$, und es bleiben nur die in Fig. 98 skizzierten drei unabhängigen Korrelationsfunktionen übrig:

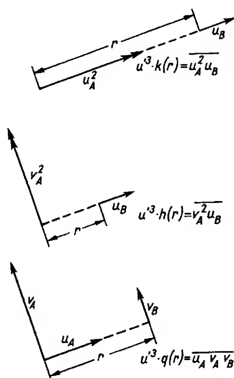


Fig. 98 Tripelkorrelationen in isotroper Turbulenz

$$\left.\begin{aligned} u'^3 k(r) &= \overline{u_A^2 u_B} \\ u'^3 h(r) &= \overline{v_A^2 u_B} = \overline{w_A^2 u_B} \\ u'^3 q(r) &= \overline{u_A v_A v_B} = \overline{u_A w_A v_B}\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.285}$$

Ähnlich wie bei den Doppelkorrelationen lassen sich durch die Kontinuitätsbedingung diese drei Funktionen auf eine – etwa auf $k(r)$ – zurückführen. Drückt man den Ausfluß durch eine Kugel für die eine Hälfte durch $k(r)$ und für die andere durch $h(r)$ aus, so folgt:

$$k(r) + 2h(r) = 0\,. \tag{3.286}$$

Entsprechend gibt die Kontinuität für eine Viertelkugel:

$$q(r) = \frac{1}{2} k(r) + \frac{r}{4} k'(r)\,. \tag{3.287}$$

[1]) Proc. Roy. Soc. London A 164, 1938.

Für $r = 0$ verschwindet die erste Ableitung von k, und damit auch von h und q, wegen

$$\overline{u'^3}\, k'(0) = \overline{u^2(x_A)\, u_x(x_A)} = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \overline{u^3(x_A)} = 0. \tag{3.288}$$

Da k, h und q ungerade Funktionen in r sind, beginnt die Taylor-Reihe mit

$$k(r) = \frac{r^3}{3!} k'''(0) + \ldots \tag{3.289}$$

Aus der Navier-Stokesschen Gleichung konnten nun v. Kármán und L. Howarth eine Gleichung für diese Korrelationen ableiten. Multipliziert man nämlich die Impulsgleichung in x-Richtung für die Strömung im Punkt A mit v_B, wobei $A\,B$ mit der x-Richtung zusammenfällt, so wird aus

$$v_B\left(\frac{\partial u_A}{\partial t} + u_A \frac{\partial u_A}{\partial x} + v_A \frac{\partial u_A}{\partial y} + w_A \frac{\partial u_A}{\partial z}\right) = v_B\left(-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p_A}{\partial x} + \nu\, \Delta u_A\right) \tag{3.290}$$

in isotroper Turbulenz nach Mittelung:

$$\overline{v_A \frac{\partial u_A}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial x} \overline{u_A u_A v_B} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{u_A v_A v_B} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{u_A w_A v_B} = \nu \Delta \overline{u_A v_B}\,. \tag{3.291}$$

Eine analoge Gleichung gibt die Multiplikation der Gleichung für $\mathrm{d}v_B/\mathrm{d}t$ mit u_A. Durch Zusammenfassung beider Gleichungen erhält man schließlich:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u'^2 f) + 2u'^3\left(h' + \frac{4h}{r}\right) = 2\nu\, u'^2\left(f'' + \frac{4f'}{r}\right)$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial t}(u'^2 f) = u'^3\left(k' + \frac{4k}{r}\right) + 2\nu\, u'^2\left(f'' + \frac{4f'}{r}\right). \tag{3.292}$$

Man könnte nun aus den Navier-Stokes-Gleichungen weitere Beziehungen für die Tripelkorrelation k gewinnen, in denen jedoch – wegen der nichtlinearen Trägheitsglieder – dann neue, unbekannte Korrelationen vierter Ordnung vorkämen, die ihrerseits von solchen fünfter Ordnung abhingen usw. Man begnügt sich daher mit Näherungsansätzen für die Trägheitsglieder, wodurch die dreifachen Korrelationen auf zweifache zurückgeführt werden (vgl. z. B. K. Hasselmann[1]).

3.7.7.3. Das Spektrum isotroper Turbulenz. Außer den Korrelationen führte G. I. Taylor (1938) als weiteren Grundbegriff das Spektrum der Turbulenz ein. Man denkt sich dazu die Geschwindigkeitsschwankungen an einem Punkt harmonisch zerlegt in sinusförmige Schwankungen verschiedenster Frequenzen n; diejenigen mit Frequenzen zwischen n und $n + \mathrm{d}n$ liefern zur gesamten kinetischen Schwankungsenergie einen Beitrag: $u'^2 F(n)\mathrm{d}n$. Für die Frequenzfunktion $F(n)$ wird daher definitionsgemäß

$$\int_0^\infty F(n)\,\mathrm{d}n = 1\,. \tag{3.293}$$

[1]) Deutsche Hydrogr. Z. **11** (1958).

Zwischen dieser Funktion $F(n)$ und der Längskorrelation $f(x)$ besteht nun ein enger Zusammenhang. Denn wenn z. B. die Turbulenz nur aus großen, langsamen Wirbel besteht, ist F im Bereich kleiner Frequenzen groß und f nimmt langsam mit x ab. Die räumliche Längskorrelation $f(x) = \overline{u u(x)}/u'^2$ kann als zeitliche Korrelation am festen Ort geschrieben werden:

$$f(x) = \frac{\overline{u(t) \cdot u(t + x/U)}}{u'^2}, \tag{3.294}$$

solange $u' \ll U$ und $t = x/(U + u) \approx x/U$.

G. I. Taylor konnte nun zeigen, daß $f(x)$ und $U F(n)/2\sqrt{2\pi}$ Fourier-Transformierte sind, d. h. daß

$$F(n) = \frac{4}{U} \int_0^\infty f(x) \cos 2\pi n \frac{x}{U} \, dx \tag{3.295}$$

und

$$f(x) = \int_0^\infty F(n) \cos 2\pi n \frac{x}{U} \, dn. \tag{3.296}$$

Für die Dissipation folgt insbesondere (durch zweimaliges Differenzieren nach x):

$$\frac{D}{\mu} = -15 u'^2 f''(0) = \frac{15 u'^2}{\lambda^2} = \frac{4\pi^2}{U^2} \int_0^\infty F(n) n^2 \, dn, \tag{3.297}$$

woraus auch zu ersehen ist, daß die hohen Frequenzen hierfür maßgebend sind. Aus Messungen geht hervor, daß zur Dissipation praktisch nur die hochfrequenten kleinsten Wirbel beitragen, deren Beitrag zur kinetischen Energie vernachlässigbar ist, wenn die Reynolds-Zahl der Strömung groß ist.

Diese Beziehungen für isotrope Turbulenz haben allgemeinere Bedeutung nach der Vorstellung des oben erwähnten Kaskadenprozesses, bei dem zunächst große Wirbel von den Abmessungen der Turbulenzerzeuger entstehen, die infolge der Trägheitskräfte in immer kleinere zerfallen [vgl. A. N. Kolmogoroff[1]), v. Weizsäcker[2]), Heisenberg[3])]. Je kleiner die Wirbel schon sind, um so weniger dürfte der weitere Zerfall von den großräumigen Vorgängen abhängen; die Feinstruktur des Turbulenzfeldes ist dann allgemein stets örtlich richtungsunabhängig oder isotrop. Für die kleinsten Wirbel, d. h. für die höchsten Frequenzen, kann man aus den hier allein wesentlichen Größen ν und D/ϱ auf folgende Maßstäbe für Längen η (z. B. Durchmesser dieser Wirbel) und Geschwindigkeiten v schließen:

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{D/\varrho}\right)^{1/4}, \quad v = \left(\nu \frac{D}{\varrho}\right)^{1/4}, \tag{3.298}$$

[1]) S. R. Acad. Sci. URSS **30** (1941).
[2]) Z. Physik **124** (1948).
[3]) Z. Physik **124** (1948).

so daß die Frequenzfunktion dort wird:

$$f = v^2 \eta F_* (k \eta) ,$$

mit k = Wellenzahl = $2\pi n/U$, wobei die dimensionslose Funktion F_* unbestimmt bleibt. Zwischen diesen kleinsten Wirbeln und den großen Wirbeln gibt es einen Frequenzbereich, in dem weder die Abmessungen der Apparatur noch die Zähigkeit eine Rolle spielen, sondern nur die Energie, die bei dem Zerfallprozeß weitergegeben wird und schließlich dissipiert wird. Aus D/ϱ kann man beim Fehlen einer charakteristischen Länge nur mit Hilfe der Wellenzahl k [1/cm] eine Frequenzfunktion von der Dimension cm^3/s^2 bilden, nämlich

$$F \sim \left(\frac{D}{\varrho}\right)^{2/3} k^{-5/3} . \qquad (3.299)$$

Diese Abhängigkeit von k wird auch experimentell in einem gewissen Frequenzbereich bestätigt.

Es konnten hier natürlich nur die einfachsten Ergebnisse der statistischen Turbulenztheorie erwähnt werden in der Hoffnung, das Interesse des Lesers für diese komplizierte Theorie zu wecken.

Anhang

1. Aufgaben mit Lösungen

Zu Abschnitt 1

1. Schätzen Sie mit Hilfe von Fig. 11 (S. 46) die Endgeschwindigkeit von Regentropfen mit dem Durchmesser $d = 0{,}5;\ 1;\ 2$ mm ab!
Die Tropfen können als starre Kugeln angesehen werden; das Dichteverhältnis $\varrho_{\text{Wasser}}/\varrho_{\text{Luft}}$ ist etwa 800, $\nu_{\text{Luft}} \approx 1/7\ \text{cm}^2/\text{s}$.
Lösung: Aus

$$\frac{\pi}{6} d^3 (\varrho_W - \varrho_L)\, g = c_W \frac{\pi}{4} d^2 \frac{\varrho_L}{2} U^2$$

folgt mit $Re = Ud/\nu$

$$Re^2 \cdot c_W(Re) = \frac{4}{3} \frac{\varrho_W}{\varrho_L} \frac{gd^3}{\nu^2}.$$

Für $d = 0{,}5;\ 1;\ 2$ mm wird $U = 2{,}1;\ 3{,}8;\ 6{,}5$ m/s.

2. Ein Rohr (Querschnitt F, mittlere Durchflußgeschwindigkeit u) verzweigt sich in n Rohre (F_n, u_n), die dann wieder in ein Rohr (F, u) münden. Wie groß ist der Druckverlust der ganzen Anordnung?

a) In turbulenter Strömung kann man den Druckverlust proportional dem Staudruck der jeweiligen Durchflußgeschwindigkeit setzen.

b) Bei laminarer Strömung (z. B. im Blutkreislauf) ist er proportional der Geschwindigkeit.

Lösung: a) In jedem der Verzweigungsrohre (Länge L_n, Durchmesser d_n) ist die Druckdifferenz gleich groß: $\Delta p = \zeta_n \frac{\varrho}{2} u_n^2$; wobei $\zeta_n = \lambda_n L_n/d_n$ mit λ_n z. B. nach (3.220). Ihr entspricht eine fiktive Druckverlustzahl ζ, so daß $\Delta p = \zeta \frac{\varrho}{2} u^2$. Es ist also $\zeta u^2 = \zeta_n u_n^2$ oder $u_n/u = \sqrt{\zeta/\zeta_n}$. Wegen der Kontinuität muß ferner $\Sigma\, u_n F_n = uF$, so daß $\sqrt{\zeta} = F/\Sigma\,(F_n/\sqrt{\zeta_n})$.

b) Bei Laminarströmung sei $\Delta p = z_n u_n = z\, u$ gesetzt. (Z. B. für lange Kreisrohre wäre nach (1.65) auf S. 38 mit L_n = Länge des n-ten Rohres $z_n = 8\pi\mu L_n/F_n$.) Mit der Kontinuitätsgleichung wird hier $z = F/\Sigma\,(F_n/z_n)$ analog zur elektrischen Stromverzweigung.

3. a) Im Gegensatz zu reinen Flüssigkeiten ist das Verhalten etwa von Kolloiden nicht durch den Newtonschen Ansatz (1.62) für die Schubspannung zu beschreiben, sondern besser z. B. durch $\tau = K\,(du/dy)_n$, mit $n \neq 1$.

b) Das Fließen mancher (plastischen) Pasten andrerseits läßt sich nach E. C.

Bingham darstellen durch $\tau = \tau_F + \mu\,(du/dy)$. Dort, wo $\tau < \tau_F$, bewegt sich das Medium wie ein starrer Körper und nur dort, wo die Fließspannung überschritten wird ($\tau > \tau_F$), fließt es wie eine Flüssigkeit. Berechnen Sie nach beiden Ansätzen die Durchflußmenge Q durch ein Kreisrohr! (Die Schubspannung bleibt auch hier porportional dem Achsabstand r wie in (1.63).)

Lösung: a) Aus

$$\tau = \frac{r}{2}\frac{\Delta p}{\Delta x} = K\left(-\frac{du}{dr}\right)^n$$

mit $r = R - y$ (R = Rohrradius) und $u = 0$ für $r = R$ folgt

$$u = \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{2K}\frac{\Delta p}{\Delta x}\right)^{1/n} \cdot [R^{(n+1)/n} - r^{(n+1)/n}]$$

und
$$Q = \int_0^R u\; 2\pi r dr = \frac{\pi n}{3n+1}\left(\frac{1}{2K}\frac{\Delta p}{\Delta x}\right)^{1/n} \cdot R^{(3n+1)/n}\,.$$

b) Die Paste fließt nur in Nähe der Rohrwand bei $r_0 < r \leqslant R$, weil nur dort $\tau > \tau_F$; dabei ist

$$r_0 = \frac{2\,\tau_F}{\Delta p/\Delta x}\,.$$

Mit
$$-\frac{\mu du}{dr} = \tau - \tau_F = \frac{1}{2}(r - r_0)\frac{\Delta p}{\Delta x}$$

und der Randbedingung $u(r = R) = 0$ wird

$$u = \frac{1}{4\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x}\,[R^2 - r^2 - 2r_0\,(R - r)].$$

In der Nähe der Rohrachse, d. h. für $0 \leqslant r < r_0$, bewegt sich die Paste dagegen wie ein fester Pfropfen mit der Geschwindigkeit $u\,(r = r_0) = (R - r_0)^2\,\Delta p/(4\mu\Delta x)$. Der gesamte Durchfluß ist

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x}\left[1 - \frac{4}{3}\frac{r_0}{R} + \frac{1}{3}\left(\frac{r_0}{R}\right)^4\right]\,.$$

4. Ausfluß von Sand aus dem Bodenloch (Durchmesser d) eines hoch aufgefüllten Zylinders. Für eine ideale Flüssigkeit wäre nach (1.46) die Ausflußgeschwindigkeit $v_A = \sqrt{2gh}$ (h = Wasserhöhe). Im Sand ist jedoch nach 1.2.4 der Bodendruck unabhängig von der Füllhöhe h. Ferner fließt der Sand nur in einem dünnen, schwach trichterförmigen Schlauch über dem Loch und bleibt daneben in Ruhe; daher kann auch hier der Gefäßdurchmesser nicht wesentlich sein. Welche dimensionsanalytische Annahme für v_A hat deshalb G. Hagen (Ber. Akad. d. Wiss., Berlin 1852) an Versuchen erprobt?

Lösung: Aus Dichte ϱ, Erdbeschleunigung g und Lochdurchmesser d kann nur auf eine Art eine Geschwindigkeit gebildet werden: $v_A \sim \sqrt{gd}$. Dann fließt aus:

$$Q = \alpha\frac{\pi}{4}\varrho\sqrt{g}\,d^{5/2}\,.$$

Wenn $d < k$ = Korndurchmesser, so kann überhaupt kein Sand ausfließen;

deshalb schreibt man oft $(d-k)^{5/2}$ statt $d^{5/2}$. Die Ausflußzahl α wegen der Strahlkontraktion erweist sich als etwa so groß wie für eine ideale Flüssigkeit ($\alpha \approx 0{,}7$ für ein scharfkantiges Loch).

Zu Abschnitt 2.1

5. Eine ideale Flüssigkeit wird durch ein enges Rohr (Querschnitt F_1) in ein weites Rohr (F_2) eingeführt wie in Fig. 99. Berechnen Sie den Druckrückgewinn $p_2 - p_1$ mit dem Impulssatz für die punktierte Kontrollfläche. Der Druck p_1 im Eintrittsstrahl kann dabei gleich dem in der umgebenden, praktisch ruhenden Flüssigkeit gesetzt werden. — Wie groß ist jedoch p_2', wenn sich der Rohrquerschnitt in einem sog. Diffusor langsam von F_1 auf F_2 erweitert? (In wirklicher Flüssigkeit dürfte der gesamte Erweiterungswinkel dieses Diffusors etwa 7° nicht überschreiten, um Ablösung zu vermeiden.) Wegen der ungeregelten Vermischung des Strahls mit der ruhenden Umgebung im ersten Fall ist $p_2 < p_2'$; die Differenz nennt man Stoßverlust.



Fig. 99. Druckverlust bei einer Rohrerweiterung

Lösung: Wegen der Kontinuität ist $u_1 F_1 = u_2 F_2$. Der Impulssatz gibt $p_1 F_2 + \varrho F_1 u_1^2 = p_2 F_2 + \varrho F_2 u_2^2$. Somit wird, mit $\varepsilon = F_1/F_2 < 1$, $p_2 - p_1 = \frac{\varrho}{2} u_1^2 (2\varepsilon - 2\varepsilon^2)$. Im verlustlosen Diffusor würde nach Bernoulli $p_2' - p_1 = \frac{\varrho}{2} u_1^2 (1 - \varepsilon^2)$. Der Stoßverlust ist also $p_2' - p_2 = \frac{\varrho}{2} u_1^2 (1-\varepsilon)^2$.

6. Durch einen 500 m langen Autotunnel (Querschnitt $F_\mathrm{T} = 45\,\mathrm{m}^2$) fahren — nur in einer Richtung — Wagen mit $u_\mathrm{W} = 60$ km/h bei einem mittleren Abstand von 100 m. Welche mittlere Luftströmung u_T erzeugen sie im Tunnel? — Der Widerstand der Wagen in der relativ langsameren Tunnelluft treibt diese an; diesem Antrieb entgegen stehen Druckverluste der Tunnelluft infolge der Wandreibung sowie die Ein- und Austrittsverluste in den Tunnelportalen, die hier zusammen etwa drei Staudrucke betragen ($\zeta_\mathrm{T} = 3$). Für die größte Querschnittfläche der Wagen sei $F_\mathrm{W} = 1{,}8\,\mathrm{m}^2$ und für ihren Widerstandsbeiwert im Tunnel $c_\mathrm{W}' = 0{,}5$ angenommen.

Lösung: Im Tunnel sind jeweils gleichzeitig $N = 5$ Wagen, und es wird

$$N c_\mathrm{W}' F_\mathrm{W} \frac{\varrho}{2} (u_\mathrm{W} - u_\mathrm{T})^2 = \zeta_\mathrm{T} F_\mathrm{T} \frac{\varrho}{2} u_\mathrm{T}^2 \quad \text{oder} \quad \frac{u_\mathrm{T}}{u_\mathrm{W}} = \frac{1}{1 + \sqrt{\zeta_\mathrm{T} F_\mathrm{T}/(N c_\mathrm{W}' F_\mathrm{W})}} .$$

Für das Zahlenbeispiel wird $u_\mathrm{T} = 2{,}6$ m/s, d. h. dieser Verkehr belüftet den Tunnel von selbst durch Zufuhr von $2{,}6 \cdot 45 = 117\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$ Frischluft. — Die „Widerstandsfläche" $F \cdot c_\mathrm{W}$ ist übrigens für einen stehenden Menschen rd. $0{,}8\,\mathrm{m}^2$, also etwas kleiner als für ein Personenauto.

7. Berechnen Sie mit dem Impulssatz das zeitliche Abklingen der Luftströmung u_T im Tunnel der vorigen Aufgabe, wenn der Verkehr zur Zeit t_0 plötzlich aufhört. Der Widerstandsbeiwert ζ_T des Tunnels kann als konstant angenommen werden.

Lösung: Aus $\varrho F_{\mathrm{T}} L \, \partial u_{\mathrm{T}}/\partial t = -\zeta_{\mathrm{T}} F_{\mathrm{T}} \varrho u_{\mathrm{T}}^2/2$ und $u_{\mathrm{T}} = u_{\mathrm{T0}}$ für $t = t_0$ folgt $u_{\mathrm{T}}/u_{\mathrm{T0}} = 1/[1 + \zeta_{\mathrm{T}} u_{\mathrm{T0}} (t - t_0)/2L]$. Mit $\zeta_{\mathrm{T}} = 3$, $u_{\mathrm{T0}} = 2{,}6$ m/s und $L = 500$ m wird z.B. $u_{\mathrm{T}}/u_{\mathrm{T0}} = 0{,}5$ nach 128 s oder nach 2,1 min.

Zu Abschnitt 2.2

8. Als Ergänzung zu Fig. 18 auf S. 65 soll die drehsymmetrische Staupunktströmung berechnet werden (vgl. 2.2.9, S. 103; Ansatz $\Phi = ax^2 + br^2$).

Lösung: $\Phi = a^2 (x^2 - r^2/2)$ und $\Psi = a\,x\,r^2$. Die Stromlinien sind also kubische Hyperbeln und die Isobaren Ellipsen mit $x^2 + r^2/4 = \text{const}$.

9. In welchem Abstand A vor dem Halbkörper in Fig. 21 auf S. 66 ist der Überdruck nur noch 1 % des Staudrucks der Anströmung bei drehsymmetrischer und bei ebener Strömung?

Lösung: Drehsymmetrischer Halbkörper (Durchmesser D) $A/D = 3{,}53 - 0{,}25 = 3{,}28$. Dagegen beim ebenen Halbkörper der Breite B: $A/B = 31{,}75 - 0{,}16 = 31{,}6$.

10. Mit welcher Potenz der Entfernung (R bzw. r) klingt das Druckfeld von Quelle, Dipol und Quadrupol in räumlicher bzw. ebener Strömung ab? — Den Quadrupol erhält man aus zwei Dipolen bei $x = +a$ und $-a$ mit dem Moment $+M$ und $-M$, die so zusammenrücken, daß $M \cdot a$ endlich bleibt, wenn $a \to 0$.

Lösung: Quelle $\Delta p \sim 1/R^4$ (bzw. $1/r^2$ in ebener Strömung), Dipol $1/R^6$ (bzw. $1/r^4$), Quadrupol $1/R^8$ (bzw. $1/r^6$). Potential des Quadrupols: $\Phi = c\,(3x^2 - R^2)/R^5$ bzw. $\Phi = c\,(x^2 - y^2)/r^4$.

11. Berechnen Sie ebene, flache Schwerewellen für endlich tiefes Wasser! — Überlagert man der Funktion $F(z)$ auf S. 70 eine weitere Funktion: $-B \exp - [\mathrm{i}\,(kz - \omega t)]$, so kann man erreichen, daß am Boden ($y = h$) $\psi = 0$ wird.

Lösung: Mit der Bezeichnung $C/2 = A\,\mathrm{e}^{-kh} = B\,\mathrm{e}^{+kh}$ wird jetzt $F(z) = C \cosh \mathrm{i}[k(z - \mathrm{i}h) - \omega t]$. Aus der linearisierten Bernoulli-Gleichung $\partial\Phi/\partial t = g\,y_0$ und aus $\partial y_0/\partial t = (\partial\Phi/\partial y)_{y=y_0}$ folgt $\omega^2 = gk \tanh kh$ und $V^2 = (g\lambda/2\pi) \tanh 2\pi h/\lambda$. Auf 1% genau gilt also in den Grenzfällen a) $\lambda/2{,}7 < h < \infty$ $V = \sqrt{g\lambda/2\pi}$ für Tiefseewellen mit normaler Dispersion, und b) $0 < h < \lambda/26$ $V = \sqrt{gh}$ für Flachwasserwellen mit der „Grundwellengeschwindigkeit" unabhängig von der Wellenlänge.

12. Welche Kraft übt eine ebene Wand auf einen Kreiszylinder in einer Parallelströmung aus? — Man kann die Wand (in Strömungsrichtung) ersetzen durch einen an ihr gespiegelten Dipol und die Kraft auf den ersten Dipol nach (2.68) auf S. 81 berechnen. Ist z.B. der erste Dipol bei $z = 0$ und der zweite bei $z = -\mathrm{i}a$, so ist die „Wand" bei $y = -a/2$ Stromlinie auch bei Anströmung U in x-Richtung. Solange der Wandabstand $a/2$ groß ist gegen den Zylinderradius R, kann die durch den gespiegelten Dipol verursachte Deformation des Kreisquerschnitts vernachlässigt werden.

Lösung: Aus $F(z)/U = z + R^2/z + R^2/(z + \mathrm{i}a)$ folgt für $(\mathrm{d}F/\mathrm{d}z)^2$ nach Partialbruchzerlegung nur das eine Glied $-4\mathrm{i}R^3/(a^3 z)$, das ein Residuum für das Integral auf dem Kreis $z = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}}$ ergibt: $8\pi R^3/a^3$. Die Wand im Abstand $a/2$ zieht also für $a/2 \gg R$ und $Re \to \infty$ den Zylinder an mit einer Kraft

$$Y = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{R}{a/2}\right)^3 \frac{\varrho}{2} U^2 \cdot 2R.$$

Dagegen wird bei $Re \ll 1$ nach H. Faxén ein Zylinder oder eine Kugel von der Wand abgestoßen, wenn auch nur mit einer Querkraft, die klein gegen den Widerstand ist. Dieser Effekt genügt daher nicht zur Erklärung der Beobachtung, daß die im Blutplasma suspendierten Teilchen sich in einem gewissen Wandabstand sammeln, als ob sie von der Wand abgestoßen würden.

13. Ein ebener Halbkörper wie in Fig. 21 auf S. 66 mit der halben Breite $b = q/2U$ wird mit der Geschwindigkeit $+U$ (nach rechts) in unbegrenzte, ruhende Flüssigkeit geschoben. Wie bewegen sich die verdrängten Flüssigkeitsteilchen? — Vom körperfesten Koordinatensystem aus gesehen ist die Strömung stationär und Strom- und Bahnlinien sind gleich: $\Psi = -Ur \sin\alpha + Ub\,\alpha/\pi = \text{const} = -Uy_\infty$ $(x \to +\infty)$. Die Geschwindigkeit eines Teilchens ist in der momentanen radialen Richtung von der Quelle $\partial\Psi/r\partial\alpha = -U\cos\alpha + Ub/\pi r$ und senkrecht dazu $-\partial\Psi/\partial r = U\sin\alpha$. Vom Körper aus gesehen ist also z. B. in x-Richtung $u_K = (\partial\Psi/r\partial\alpha)\cos\alpha - (\partial\Psi/\partial r)\sin\alpha = -U + (Ub/\pi r)\cdot\cos\alpha$. Die Komponenten der Absolutgeschwindigkeit, die die Quelle unabhängig von ihrer Eigengeschwindigkeit erzeugt, sind demnach $u_A = dx/dt = (Ub/\pi r)\cos\alpha$ und $v_A = dy/dt = (Ub/\pi r)\sin\alpha$, woraus folgt $dy/dx = \tan\alpha$. Damit läßt sich die Gleichung der Bahnlinien in raumfesten Koordinaten ausdrücken.

Lösung: Aus $y - y_0 = b\alpha/\pi = (b/\pi)\arctan dy/dx$ folgt $\zeta = x/b = (1/\pi)\ln\sin\pi(\eta - \eta_\infty) + \text{const}$ oder $\eta - \eta_\infty = (y - y_\infty)/b = (1/\pi)\arcsin\exp\pi(\zeta - c)$. Teilchen, die ursprünglich den Achsabstand η_∞ hatten, werden auf $\eta = \eta_\infty + 1$ angehoben, da $\eta - \eta_\infty = 0$ oder 1 für $\zeta \to -\infty$. Ist ein Teilchen auf halbe Erhöhung angelangt: $\eta = \eta_\infty + 1/2$, so befindet sich die Quelle gerade unter ihm, da dann $\alpha = \pi/2$ und $dy/dx \to \infty$, und die horizontale Geschwindigkeit wechselt das bisher positive Vorzeichen. Aus

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{U}{\pi}\frac{\sin^2\alpha}{y} = \frac{U}{\pi b}\frac{\sin^2\pi(\eta - \eta_\infty)}{\eta}$$

folgt
$$t = \frac{\pi b}{U}\left\{-\frac{\eta}{\pi}\cot\pi(\eta - \eta_\infty) + \frac{1}{\pi^2}\ln\sin\pi(\eta - \eta_\infty)\right..$$

Ein Teilchen wird z. B. von $\eta = \eta_\infty + 1/2$ bis auf $\eta = \eta_\infty + 0{,}99$ in der Zeit Δt angehoben:

$$\Delta t = \frac{\pi b}{U}\left\{-\frac{\eta_\infty + 0{,}99}{\pi}\cot 0{,}99\,\pi + \frac{1}{\pi^2}\ln\sin 0{,}99\,\pi\right\} = \frac{b}{U}(31{,}8\,\eta_\infty + 30{,}4);$$

es bewegt sich dabei in negativer x-Richtung um $\Delta x = -1{,}10\,b$ unabhängig von η_∞.

14. Im einfachsten Modell einer reibungslosen Scherströmung gilt überall $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \text{const} \neq 0$. Die ebene Strömung um einen Kreiszylinder, die diese Bedingung erfüllt, hat nach G. I. Taylor die Stromfunktion

$$\frac{\Psi}{U} = r\sin\alpha - \frac{R^2}{r}\sin\alpha + \frac{r^2}{2c}\sin^2\alpha + \frac{R^4}{4cr^2}\cos 2\alpha.$$

Zeigen Sie, daß in der Tat überall rot $\boldsymbol{v} = -k\Delta\Psi = \text{const}$, daß am Zylinder $r = R$ $\Psi = \text{const} = 0$ und daß für $r \to \infty$ gilt: $u/U = 1 + y/c$, $v = 0$. Berechnen Sie die Druckverteilung am Zylinder, die Lage der Staupunkte und den Auftrieb des Zylinders. — Die Bernoulli-Konstante hängt hier von der jeweiligen Stromlinie ab, auf der $\Psi = \text{const} = \Psi_\infty$ gilt.

Lösung: Bernoulli-Gleichung $v^2/2 + p/\varrho = f(\Psi)$; weit vor oder hinter dem Zylinder ist $f(\Psi) = (U^2/2)\,(1 + y/c)^2 + p_\infty/\varrho$ und $\Psi_\infty = \int u\,\mathrm{d}y = U\,(y + y^2/2c)$ also $f(\Psi) = p_\infty/\varrho + U^2/2 + U\,\Psi/c$. Mit $k = R/c$ wird auf dem Zylinder

$$c_\mathrm{p} = \frac{p - p_\infty}{\varrho\, U^2/2} = (1 - 4\sin^2\alpha)\cdot\left[(1 + k\sin\alpha)^2 - \frac{k^2}{4}\right].$$

Somit wird $\mathrm{d}c_\mathrm{p}/\mathrm{d}\alpha = 0$ für $\cos\alpha = 0$ und $\sin\alpha = -1/2k$, aber auch für $\sin\alpha = (-1 + \sqrt{1+k^2})/2k$, wo $c_\mathrm{p} = c_{\mathrm{pmax}} = 1$ (Staupunkte). Der Auftriebsbeiwert wird

$$c_\mathrm{a} = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} c_\mathrm{p}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha = 2\pi k\,.$$

15. Die zusätzliche oder hydrodynamische Masse eines Körpers, der in ruhender idealer Flüssigkeit beschleunigt wird (vgl. 2.2.5), ergibt sich auch aus der zeitlichen Änderung der kinetischen Energie E der umgebenden Flüssigkeit im ganzen Strömungsraum V; ihr entspricht die Leistung der am Körper wirkenden äußeren Kraft K. Bei translatorischer Beschleunigung in x-Richtung muß demnach gelten: $\partial E/\partial t = K\cdot U$. Für die Energie gilt ferner

$$E = \int \frac{\varrho}{2}\,(\mathrm{grad}\,\Phi)^2\,\mathrm{d}V = \frac{\varrho}{2}\int \Phi\,\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,\mathrm{d}F$$

nach dem Greenschen Satz (vgl. Anhang mit $\Psi = \Phi$ und $\Delta\Phi = 0$); F = Körperoberfläche, n = innere Normale. Berechnen Sie so E, K und m_{zus} für eine Kugel.

Lösung: Das Potential der bewegten Kugel ist nach (2.140) auf S. 105 ohne Parallelströmung $\Phi = U R_0^3 \cos\vartheta/2R^2$. Auf der Kugel $R = R_0$ wird $\partial\Phi/\partial n = -\partial\Phi/\partial R = U\cos\vartheta$ und $E = (\pi/3)\,\varrho\, U^2 R_0^3$, so daß

$$K = \frac{1}{2}\,\frac{4\pi}{3}\,R_0^3\varrho\,\dot{U}.$$

K ergibt sich also proportional zur momentanen Beschleunigung $\dot{U}(t)$ und die hydrodynamische Masse m_{zus} ist gleich der halben Masse der von der Kugel verdrängten Flüssigkeit. (Für einen beliebigen Körper, z. B. ein Paddel, ist die hydrodynamische Masse kein Skalar sondern ein richtungsabhängiger Tensor.)

16. Zur Erklärung der Korrosion bei Kavitation haben schon H. Besant und Lord Rayleigh als Modellströmung das Zusammenstürzen eines gasgefüllten Bläschens (Kugelradius $R(t)$ zeitabhängig, $\dot{R} = \partial R/\partial t$) in unbegrenztem Wasser untersucht. Das Potential der konzentrischen Wasserströmung ist $\Phi = -\dot{R}R^2/r$, mit r = Aufpunktabstand vom Kugelmittelpunkt. Die im Bläschen eingeschlossene Gasmenge wird adiabatisch komprimiert. Die Bernoulli-Gleichung gibt den Innendruck p_i bei $r = R$ abhängig von $\dot{R}$ und $\ddot{R}$. Es wird

angenommen, es gäbe einen Anfangszustand $R = R_0$ mit $\dot{R} = 0$ beim Innendruck $p_0 < p_\infty$; der Außendruck p_∞ sei zeitlich konstant. Bis zu welchem Radius R_{min} wird das Bläschen zusammengedrückt, und wie groß ist dann der Innendruck p_{imax}?

Lösung: Aus der Bernoulli-Gleichung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)^2 + \frac{p(r,t)}{\varrho_W} = \frac{p_\infty}{\varrho_W}$$

(ϱ_W = Wasserdichte) ergibt sich für $r = R$ der Innendruck $p_i(t)$ aus

$$\frac{(p_\infty - p_i)}{\varrho_W} = -R\ddot{R} - \frac{3\dot{R}^2}{2} = -\left(\frac{1}{2R^2\dot{R}}\right)\frac{d}{dt}\left(R^3\dot{R}^2\right)$$

Andrerseits ist die Dichte des eingeschlossenen Gases $\varrho_G \sim 1/R^3$, und es wird $p_i \sim \varrho_G^\varkappa \sim 1/R^{3\varkappa}$, oder auf den Ausgangszustand bezogen $p_i/p_0 = (R_0/R)^{3\varkappa}$. Setzt man dies in die obige Gleichung ein, integriert einmal und wählt die Integrationskonstante so, daß $\dot{R} = 0$ für $R = R_0$ wird, so wird

$$\frac{3\varrho_W}{2p_\infty}\dot{R}^2 = \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - 1 + \frac{1}{\varkappa - 1}\frac{p_0}{p_\infty}\cdot\left[\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\varkappa}\right] \text{ für } \frac{R_0}{R} \geqslant 1\,.$$

Auch für $R = R_{min}$ wird $\dot{R} = 0$, und die rechte Gleichungsseite verschwindet. Zahlenbeispiele hierfür sind mit $\varkappa = 1{,}4$ $R_{min}/R_0 = 0{,}1$ (bzw. 0,01), wenn $p_0/p_\infty = 0{,}0269$ (bzw. 0,00159) und $p_{imax}/p_\infty = (R_0/R_{min})^{3\varkappa}\cdot p_0/p_\infty = 426$ (bzw. 401000). Es können also punktweise sehr hohe, zerstörende Drucke auftreten, — übrigens auch noch bei Berücksichtigung der Kompressibilität des Wassers, der Oberflächenspannung und der Zähigkeit. Allerdings wird die konzentrische Strömung in Wirklichkeit meist unsymmetrisch, die Kugelblase wird abgeflacht und der Enddruck wesentlich kleiner. Schließlich ist die Rechnung noch so zu erweitern, daß p_∞ sich zeitlich ändert, da das im Unterdruckgebiet entstehende Bläschen im Druckfeld längs des Körpers weiterströmt, bis es durch den anwachsenden Außendruck wieder komprimiert wird.

17. Mit welcher Beschleunigung beginnt eine Kohlensäureblase im Selterswasser hochzusteigen, solange nur der Archimedische Auftrieb aber noch kein Strömungswiderstand wirkt? — Der Trägheitswiderstand wird durch die zusätzliche Masse auf S. 84 beschrieben.

Lösung: Auftrieb $A = (\varrho_W - \varrho_G)\frac{4\pi}{3}R^3 g$, mit ϱ_W Wasserdichte und ϱ_G Gasdichte in der Blase (Radius R). Zur eigenen Masse der Blase $m = \varrho_G\frac{4\pi}{3}R^3$ kommt noch die hydrodynamische Masse $m' = 0{,}5\,\varrho_W\frac{4\pi}{3}R^3$ dazu. Aus $A = (m + m')\cdot b$ folgt für die Beschleunigung nach oben $b/g = (\varrho_W - \varrho_G)/(\varrho_G + 0{,}5\varrho_W)$, also hier mit $\varrho_G \ll \varrho_W$ $b = 2g$ = zwei Erdbeschleunigungen.

Zu Abschnitt 2.3

18. Zimmerluft hat eine Dichte von $\varrho = 1{,}2\ \mathrm{kg/m^3}$. Wie groß ist ihre Gaskonstante?

Lösung: Der Atmosphärendruck ist etwa 1 bar, die Temperatur sei 20 °C. Dann wird $R = p/\varrho T = 10^5/(1{,}2\cdot 293) = 284\ \mathrm{m^2/s^2\cdot K}$. Genauer ist natürlich folgende Rechnung: Die absolute Gaskonstante ist $R_{abs} = 8320\ \mathrm{m^2/s^2\cdot K}$. Das Molgewicht trockener Luft ist $m = 28{,}8$, so daß $R = R_{abs}/m = 289\ \mathrm{m^2/s^2\cdot K}$.

19. Wieviel Luft entweicht je Sekunde aus einem Kessel mit einem Loch von 1 cm² Querschnitt, solange der Kesseldruck größer als 2 bar ist?

Lösung: Nach (1.51) auf S. 33 und (2.181) auf S. 118 ist

$$Q_{max}/\varrho_0 = [2/(\varkappa+1)]^{(\varkappa+1)/2(\varkappa-1)} \cdot F_1 c_0 \approx 20\ \mathrm{l/s}.$$

20. Schätzen Sie die Größenordnung der Dicke ε eines schwachen Verdichtungsstoßes in Luft ab bei Berücksichtigung der Zähigkeit, aber Vernachlässigung der Wärmeleitung. — Der große Geschwindigkeitsgradient von der Ordnung $\Delta u/\varepsilon$ im Stoß ergibt im Stromfadenquerschnitt ΔF eine Dissipationswärme (vgl. (3.21) auf S. 144). Vergleichen Sie die zugehörige Entropieerhöhung mit derjenigen, die die durchfließende Masse $\varrho u\, \Delta F$ nach (2.200) auf S. 122 erfährt.

Lösung: Die Größenordnung der Entropieerhöhung ist

$$\Delta S \sim \frac{\mu}{T}\left(\frac{\Delta u}{\varepsilon}\right)^2 \cdot \varepsilon \Delta F \sim \varrho u \Delta F \cdot R \cdot (Ma_1^2 - 1)^3 \quad \text{und} \quad \Delta u/u \sim (Ma_1^2 - 1)\,.$$

Für schwache Stöße mit $Ma_1 \approx 1$ und $u_1^2 \approx c^2 \approx RT/\varkappa$ wird daher $\varepsilon\cdot(Ma_1^2 - 1) \sim \nu/c$, also für Luft mit $\nu \sim 10^{-5}\ \mathrm{m^2/s}$, $c \sim 300\ \mathrm{m/s}$ und z. B. $Ma_1 = 1{,}1$ wird $\varepsilon \sim 3\cdot 10^{-7}$ m. Die freie Weglänge der Moleküle (bei 0 °C und 1 bar) ist etwa $0{,}6\cdot 10^{-7}$ m, also von gleicher Ordnung. Eigentlich darf man also bei dieser Rechnung das Gas nicht mehr als Kontinuum darstellen.

21. Die Masse einer Rakete $m(t)$ und ihre Geschwindigkeit $U(t)$ im Raum hängen von der Zeit t ab, wenn je Zeiteinheit die (positive) Gasmasse $-\,\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ nach hinten ausgestoßen wird mit einer Geschwindigkeit u_A relativ zur Rakete. Stellen Sie eine Beziehung zwischen U und m mit Hilfe des Impulssatzes ohne Berücksichtigung der Schwerkraft auf, wenn $u_A = \mathrm{const}$ (zeitunabhängig) ist. Praktisch liegt u_A, die Austrittsgeschwindigkeit aus einer Lavaldüse, in der Nähe der Maximalgeschwindigkeit (S. 34); warum strebt man hier möglichst wasserstoffreiche Triebgase und hohe Verbrennungstemperaturen an?

Lösung: Die Bewegungsgrößen in positiver und negativer Richtung ändern sich in der Zeiteinheit wie $\mathrm{d}(mU)/\mathrm{d}t = (-\,\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)\cdot(u_A - U)$. Somit wird $U = -\int u_A\, \mathrm{d}m/m$ oder $U = u_A \ln(m_0/m)$, wobei m_0 die Startmasse beim Bewegungsbeginn $U = 0$ ist. Wenn schließlich $m < m_0/2{,}72$ wird, so wird $u_A < U$, d. h. die Treibgase behalten eine Geschwindigkeit $U - u_A$ in Flugrichtung (bei der hier betrachteten Einstufenrakete). — Um möglichst große Werte von

$$u_{A\,max} = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1}\, T\, R_{abs}/m}$$

zu erzielen (technisch verwirklicht bis über 4 km/s), müssen große Temperaturen und kleine Molekulargewichte m angestrebt werden.

22. Die gasdynamische Gleichung (2.211) auf S. 128 kann auch als Euler-Gleichung eines Variationsprinzips gewonnen werden: $-\iiint p(u,v,w)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \text{Minimum}$. Zum Beweis ist es zweckmäßig, Druck und Dichte mit den Ruhe-

größen p_0 und ϱ_0 dimensionslos zu machen, sowie die Geschwindigkeit mit

$$\sqrt{\frac{2\,\varkappa}{\varkappa-1}\,p_0/\varrho_0} = \sqrt{\frac{2}{\varkappa-1}}\cdot c_0\,.$$

Dann lautet z. B. die Energiegleichung (2.188) auf S. 128

$$\frac{p_+}{\varrho_+} = \frac{p/p_0}{\varrho/\varrho_0} = 1 - v_+^2 \text{ mit } \frac{p_+}{\varrho_+^\varkappa} = 1 \text{ und } v_+ = \operatorname{grad}\Phi\,.$$

Zeigen Sie, daß z. B. für ebene Strömung aus $-\iint p_+(\Phi_x, \Phi_y)\,dx\,dy =$ Minimum als zugehörige Euler-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p_+}{\partial \Phi_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial p_+}{\partial \Phi_y}\right) = 0$$

sich tatsächlich die Gleichung (2.211) für v_+ bzw. Φ ergibt. Wie vereinfacht sich dieses Variationsprinzip für inkompressible Strömung, d. h. für $v_+ = \operatorname{grad}\Phi \to 0$?

Lösung: Aus

$$-\iint p_+\,dx\,dy = -\iint\left[1 - (\operatorname{grad}\Phi)^2\right]^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} dx\,dy = \text{Minimum}$$

folgt $$(1 - \Phi_x^2 - \Phi_y^2)\,\Delta\Phi = \frac{2}{\varkappa-1}\,(\Phi_x^2\,\Phi_{xx} + 2\,\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy} + \Phi_y^2\Phi_{yy})\,.$$

Im Grenzfall $v_+ = \operatorname{grad}\Phi \to 0$ wird

$$\iint\left[-1 + \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\,(\operatorname{grad}\Phi)^2 - + ..\right]\cdot dx\,dy = \text{Min.}$$

oder $\iint (\operatorname{grad}\Phi)^2\,dx\,dy = \text{Min.}$ und $\Delta\Phi = 0$.

Zu Abschnitt 3

23. Wie groß ist der Widerstandsbeiwert einer längs angeströmten Platte mit der *Re*-Zahl a) 10^6 und b) 10^7, wenn der laminarturbulente Umschlag bei $Re_{\text{krit}} = 3\cdot 10^5$, $5\cdot 10^5$ oder 10^6 erfolgt?

Lösung: Nach (3.229) auf S. 204 wird in diesen Fällen a) $10^3 c_f = 3{,}62$, $2{,}97$ oder $1{,}37$ (exakt eigentlich $1{,}328$) und b) $10^3 c_f = 2{,}84$, $2{,}78$ oder $2{,}62$. Im ersten Fall ist also die Strömung längs der Platte, bzw. auch die längs eines schlanken Körpers, sehr empfindlich gegen Störungen der Außenströmung, gegen Erschütterungen und dgl.

24. Ähnlich wie in Abschn. 3.3.3 auf S. 152 sei eine unendlich lange Platte in zäher Flüssigkeit angenommen, die in ihrer Ebene nach dem jetzt verallgemeinerten Geschwindigkeitsgesetz $U = U_0(t/T)^n$ für $t \geqslant 0$ in Bewegung gesetzt werde. Zeigen Sie, daß sich auch dann noch affine Geschwindigkeitsprofile $u/U = f(\eta)$ ergeben, zu deren Berechnung allerdings parabolische Zylinderfunktionen benötigt werden (E. J. Watson, Proc. Roy. Soc. **A 231** (1955) 104—116).

Lösung: Mit $\eta = y/2\sqrt{\nu t}$ ergibt sich für $u/U = f(\eta)$: $f'' + 2\eta f' - 4nf = 0$. Die Randbedingungen $f = 1$ für $\eta = 0$ und $f \to 0$ für $\eta \to \infty$ werden erfüllt von der Lösung

$$f(\eta) = 2^{n+1/2}\,\pi^{-1/2}\cdot\Gamma(n+1)\cdot e^{-\eta^2/2}\cdot D_{-2n-1}(\eta\sqrt{2}).$$

D ist eine parabolische Zylinderfunktion. Speziell für $n = 1$ wird übrigens die Wandschubspannung

$$\tau_0 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\varrho U_0}{T}\sqrt{\nu t}$$

und die zur Beschleunigung der Platte benötigte Schleppleistung $\tau_0 U \sim t^{3/2}$.

25. Ein Floß (Gewicht G), das ohne jeden Antrieb auf einem Fluß (Gefälle i) treibt, bewegt sich schneller flußabwärts als das es umgebende Wasser und kann daher gesteuert werden. Wie ist das zu erklären, obwohl doch die flußabwärts gerichtete Antriebskraft für das Floß ebenso groß ist wie für das vom Floß verdrängte Wasser, nämlich $G\cdot i$?

Lösung: Der Widerstand des Floßes, der in der dünnen turbulenten Reibungsschicht und im Nachlauf entsteht, ist kleiner, als es der der verdrängten Wassermasse wäre. Denn diese wäre durch den Impulsaustausch infolge der grobballigen Turbulenz im Fluß mit dem umgebenden Wasser viel stärker „verzahnt".

26. Den Widerstand schlanker Körper bei $Re > Re_{krit}$ kann man verringern, wenn man das laminar-turbulente Umschlagen seiner Grenzschicht verzögert, indem man — etwa durch die porös ausgeführte Körperwand — Grenzschichtflüssigkeit kontinuierlich absaugt. Durch das Fortschaffen langsamer Teilchen in Wandnähe wird die Grenzschicht stabilisiert, so daß sie laminar bleibt und weniger Widerstand verursacht (auch bei Berücksichtigung der Absaugeleistung). Praktisch günstig ist die Größenordnung der Absaugegeschwindigkeit $-v_0 \sim 10^{-4}\cdot$ Anströmgeschwindigkeit. Im einfachsten Fall homogener Absaugung an einer längs angeströmten, ebenen Platte ($u_0 = 0$, $-v_0 = \text{const}$) ergibt sich asymptotisch für $x \to \infty$ eine besonders einfache, nämlich von x unabhängige Lösung der Grenzschichtgleichung, die sogar die Navier-Stokes-Gleichung exakt befriedigt. Wie lautet sie?

Lösung: Da die asymptotische Strömung nicht mehr von x abhängt, folgt aus der Kontinuität $v(x,y) = v_0 = \text{const}$. Die Grenzschicht-, aber auch die Navier-Stokes-Gleichung, gibt dann $v_0 u_y = \nu u_{yy}$ mit der Lösung $u(y) = U\cdot(1 - \exp(v_0 y/\nu))$ für die Randbedingungen $y = 0$ $u = 0$ und $y \to \infty$ $u \to U$ für $v_0 < 0$. Ferner wird $\delta_1 = \nu/(-v_0)$, $\delta_2 = \delta_1/2$, $\delta_3 = 5\,\delta_1/6$ und $\tau_0 = \varrho U\cdot(-v_0)$. Der Widerstand eines Plattenstücks $b\Delta x$ (b Breite quer zur Anströmung), durch das die Menge $\Delta Q = -v_0 b\Delta x$ abgesaugt wird, ist hier unabhängig von der Zähigkeit gleich $\Delta W = \varrho U\,\Delta Q$ entsprechend (2.10) auf S. 51 für den Widerstand einer Senke. — Für endliches x sind die Geschwindigkeitsprofile jedoch noch nicht affin. Praktisch wird nach R. Iglisch die obige Lösung erst erreicht, wenn $(Ux/\nu)\,(v_0/U)^2 \geqslant 4$.

27. Ein Passagierschiff mit der Länge 200 m, der Breite $B = 26$ m und dem Tiefgang $T = 9{,}1$ m hat eine Wellenleistung N von 22500 kW bei einer Fahrgeschwindigkeit von $U = 23$ Knoten (1 kn = 1 Seemeile je h = 0,514 m/s). Diese große Leistung, die zur Überwindung des Widerstands aufzubringen ist,

wird schließlich — hinter dem Schiff — von der Zähigkeit in Wärmeenergie umgewandelt. Wie stark wird nun das Wasser im Nachlauf erwärmt, wenn man — zur Abschätzung der Größenordnung — annimmt, daß die gesamte Widerstandsleistung im Nachlauf konzentriert bleibt, und daß der Nachlaufquerschnitt überall etwa $B \cdot T$ ist?

Lösung: In jeder Sekunde wird der Nachlauf um die Wassermasse $\varrho BTU = 2{,}80 \cdot 10^6$ kg/s vergrößert und dort die Leistung $N = 22\,500$ KW abgegeben. Da die spezifische Wärme des Wassers $c_p = 4{,}187$ kWs/kg·K ist, erhöht sich die Wassertemperatur im Nachlauf um $22\,500/(2{,}80 \cdot 10^6 \cdot 4{,}187) = 0{,}002$ K. – Wegen der hohen Wärmekapazität des Wassers bleibt also selbst diese Leistung, bzw. auch die kinetische Energie einer Wasserströmung stets klein gegen die innere Energie der Flüssigkeit, im Gegensatz zur Gasdynamik.

28. Ein Sieb (Drahtdurchmesser d, Maschenweite l) in einem durchströmten Rohr erzeugt einen Druckverlust Δp. Wie hängt dieser vom Öffnungsverhältnis $\beta = (1-d/l)^2$ ab, wenn man annimmt, daß für den Nachlauf hinter jedem einzelnen Drahtstück nicht die mittlere Geschwindigkeit im Rohr U weit vor oder hinter dem Sieb maßgebend ist, sondern die im engsten Siebquerschnitt U/β?

Lösung: Setzt man $\Delta p = c \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot (U/\beta)^2 (1-\beta)$, so kann die „Widerstandszahl" c des einzelnen Drahtstücks noch von der Reynoldszahl $(U/\beta)d/\nu$ abhängen; Messungen ergeben im Mittel $c \approx 6 \cdot (Ud/\beta\nu)^{-1/3}$. – Ähnliche Überlegungen zeigen, daß der Luftwiderstand eines Zugs (Querschnitt F_Z) im Tunnel (Querschnitt F_T) proportional zu $F_Z/(1-F_Z/F_T)^2$ ist.

2. Kleine Formelsammlung

Vektoranalysis

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}a_x + \boldsymbol{j}a_y + \boldsymbol{k}a_z$$

$$\operatorname{grad} \Phi = \boldsymbol{i}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos \sphericalangle (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin \sphericalangle (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \boldsymbol{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \boldsymbol{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = +\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial}{\partial y} a_z - \frac{\partial}{\partial z} a_y\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial}{\partial z} a_x - \frac{\partial}{\partial x} a_z\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial}{\partial x} a_y - \frac{\partial}{\partial y} a_x\right)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \Delta\Phi = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi$$

$\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0, \quad \operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi = 0$

$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{a} - \Delta\boldsymbol{a}$, mit $\Delta\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}\Delta a_x + \boldsymbol{j}\Delta a_y + \boldsymbol{k}\Delta a_z$

$(\boldsymbol{a} \operatorname{grad})\, \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot (\boldsymbol{e}_a \operatorname{grad})\, \boldsymbol{b} =$ die Änderung von $\boldsymbol{b}$ in Richtung von $\boldsymbol{a}$, multipliziert mit dem Betrag von $|\boldsymbol{a}|$. $\boldsymbol{e}_a = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} =$ Einheitsvektor in Richtung von $\boldsymbol{a}$

$\operatorname{grad}(\lambda\Phi) = \lambda \operatorname{grad} \Phi + \Phi \operatorname{grad} \lambda$

$\operatorname{div}(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{a} + \operatorname{grad} \lambda \cdot \boldsymbol{a}$

$\operatorname{rot}(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda \operatorname{rot} \boldsymbol{a} + \operatorname{grad} \lambda \times \boldsymbol{a}$

$\operatorname{div} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \operatorname{rot} \boldsymbol{b}$

$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b} \operatorname{grad})\, \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a} \operatorname{grad})\, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \operatorname{div} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \operatorname{div} \boldsymbol{a}$

$\operatorname{grad} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b} \operatorname{grad})\, \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a} \operatorname{grad})\, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{a}$

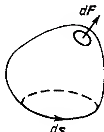
Insbesondere für $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ folgt daraus: $(\boldsymbol{a} \operatorname{grad})\, \boldsymbol{a} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{a} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{a}$

Integralsatz von Gauß: $\int\limits_V \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, \mathrm{d}V = \int\limits_F \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{F}$

($V =$ Volumen, das von der geschlossenen und einfach zusammenhängenden Fläche F begrenzt wird; $\mathrm{d}\boldsymbol{F} =$ Flächenelement mit der Richtung der äußeren Normale.)

$\int\limits_V \operatorname{rot} \boldsymbol{a}\, \mathrm{d}V = \int\limits_F \mathrm{d}\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{a}$; $\quad \int\limits_V (\boldsymbol{a} \operatorname{grad})\, \boldsymbol{b}\, \mathrm{d}V = \int\limits_F (\boldsymbol{a}\, \mathrm{d}\boldsymbol{F})\boldsymbol{b}$; $\quad \int\limits_V \Delta\Phi\, \mathrm{d}V = \int\limits_F \operatorname{grad} \Phi \mathrm{d}\boldsymbol{F}$

Integralsatz von Stokes: $\int\limits_F \operatorname{rot} \boldsymbol{a}\, \mathrm{d}\boldsymbol{F} = \oint \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$



($\mathrm{d}\boldsymbol{s} =$ Bogenelement der geschlossenen und einfach zusammenhängenden Randlinie der Fläche F; die äußere Flächennormale muß mit dem Umlaufsinn des Randintegrals eine Rechtsschraube bilden.)

$\int\limits_F \operatorname{grad} \Phi \times \mathrm{d}\boldsymbol{F} = \oint \Phi \mathrm{d}\boldsymbol{s}$

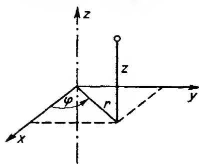
Greensche Sätze:

$\int\limits_V (\Psi\Delta\Phi + \operatorname{grad} \Phi \operatorname{grad} \Psi)\, \mathrm{d}V = \int\limits_F \Psi \operatorname{grad} \Phi\, \mathrm{d}\boldsymbol{F}$

$\int\limits_V (\Psi\Delta\Phi - \Phi\Delta\Psi)\, \mathrm{d}V = \int (\Psi \operatorname{grad} \Phi - \Phi \operatorname{grad} \Psi)\, \mathrm{d}\boldsymbol{F}$

$\int\limits_V \operatorname{grad} \Phi\, \mathrm{d}V = \int\limits_F \Phi \mathrm{d}\boldsymbol{F}$

Zylinderkoordinaten



Koordinate	r	φ	z
Einheitsvektor	e_1	e_2	e_3
Geschwindigkeits-komponente	u	v	w

Volumenelement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}r \cdot r\mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}z$

$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \qquad z = z$

$$\operatorname{grad}\Phi = e_1\frac{\partial\Phi}{\partial r} + e_2\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + e_3\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = e_1\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + e_2\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}\right) + e_3\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv) - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)$$

Navier-Stokes-Gleichung für $\varrho = \text{const}$, $\nu = \text{const}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\Delta u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\varrho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\varphi} + \nu\left(\Delta v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta w, \quad \text{mit}$$

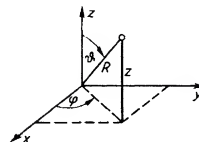
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Wegen $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$ können die Beschleunigungskomponenten auch umgeschrieben werden:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial uv}{\partial\varphi} + \frac{\partial uw}{\partial z} + \frac{u^2 - v^2}{r} = \ldots$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v^2}{\partial\varphi} + \frac{\partial vw}{\partial z} + \frac{2uv}{r} = \ldots$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial vw}{\partial\varphi} + \frac{\partial w^2}{\partial z} + \frac{uw}{r} = \ldots$$



Kugelkoordinaten

Koordinate	R	φ	ϑ
Einheitsvektor	E_1	E_2	E_3
Geschwindigkeits-komponente	U	V	W

$x = R\sin\vartheta\cos\varphi \qquad y = R\sin\vartheta\sin\varphi \qquad z = R\cos\vartheta$

Volumenelement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}R \cdot R\sin\vartheta\mathrm{d}\varphi \cdot R\mathrm{d}\vartheta$

$$\operatorname{grad}\Phi = E_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + E_2 \frac{1}{R\sin\vartheta}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + E_3 \frac{1}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}$$

$$\operatorname{div} v = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2 U) + \frac{1}{R\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{1}{R\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(W\sin\vartheta)$$

$$\operatorname{rot} v = E_1 \frac{1}{R\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial \vartheta}(V\sin\vartheta) - \frac{\partial W}{\partial \varphi}\right\}$$
$$+ E_2 \frac{1}{R}\left\{\frac{\partial}{\partial R}(RW) - \frac{\partial U}{\partial \vartheta}\right\}$$
$$+ E_3 \left\{\frac{1}{R\sin\vartheta}\frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RV)\right\}$$

Navier-Stokes-Gleichung für $\varrho = \text{const}$, $\nu = \text{const}$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial R} + \frac{V}{R\sin\vartheta}\frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{W}{R}\frac{\partial U}{\partial \vartheta} - \frac{V^2+W^2}{R}$$
$$= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial R} + \nu\left(\Delta U - \frac{2U}{R^2} - \frac{2}{R^2\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{2}{R^2}\frac{\partial W}{\partial \vartheta} - \frac{2W\cot\vartheta}{R^2}\right),$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U\frac{\partial V}{\partial R} + \frac{V}{R\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{W}{R}\frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \frac{UV}{R} + \frac{VW\cot\vartheta}{R}$$
$$= -\frac{1}{\varrho}\frac{1}{R\sin\vartheta}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu\left(\Delta V + \frac{2}{R^2\sin\vartheta}\frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{2\cos\vartheta}{R^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial W}{\partial \varphi} - \frac{V}{R^2\sin^2\vartheta}\right)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + U\frac{\partial W}{\partial R} + \frac{V}{R\sin\vartheta}\frac{\partial W}{\partial \varphi} + \frac{W}{R}\frac{\partial W}{\partial \vartheta} + \frac{UW}{R} - \frac{V^2\cot\vartheta}{R}$$
$$= -\frac{1}{\varrho}\frac{1}{R}\frac{\partial p}{\partial \vartheta} + \nu\left(\Delta W - \frac{2\cos\vartheta}{R^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{2}{R^2}\frac{\partial U}{\partial \vartheta} - \frac{W}{R^2\sin^2\vartheta}\right),$$

$$\text{mit}\quad \Delta = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right).$$

3. Einige Materialkonstanten

Dichte ϱ, kinematische Zähigkeit ν, und Schallgeschwindigkeit c abhängig von der Temperatur.

1) Wasser:

Temperatur in °C	0	10	20	40	100
ϱ in g/cm³	0,9998	0,9997	0,9982	0,9922	0,9584
ν in cm²/s	0,0179	0,0131	0,0100	$0{,}0065_8$	$0{,}0029_5$
c in m/s	1403	1447	1483	1529	— —

2) Drei andere Flüssigkeiten bei 15 °C:

	Quecksilber	Äthylalkohol	Glyzerin
ϱ in g/cm³	13,56	0,797	1,263
ν in cm²/s	$0{,}0011_7$	0,0164	19,0
c in m/s	1451	1168	1923

3) Trockene Luft bei 760 mm Barometerstand:

Temperatur in °C	0	10	20	40	100
$10^3\,\varrho$ in g/cm³	1,293	1,247	1,205	1,127	0,946
ν in cm²/s	0,133	0,142	0,151	0,170	0,231
c in m/s	332	338	344	355	387

($\varrho \sim$ Druck; $\nu \sim 1/$Druck; $c \sim \sqrt{T}$ unabhängig vom Druck.)

4. Hinweise auf einige weiterführende Bücher

1. Strömungslehre, allgemein:
   Prandtl/Oswatitsch/Wieghardt, Führer durch die Strömungslehre, 7. Aufl., Braunschweig 1969.
   L. M. Milne-Thomson, Theoretical Hydrodynamics, London 1949.
   V. L. Streeter, Editor, Handbook of Fluid Dynamics, New York 1961.
   S. Flügge, Editor, Handbuch der Physik, Bd. VIII/1, 1959, Bd. VIII/2 1963, Bd. IX, 1960, Berlin-Göttingen-Heidelberg.
   L. D. Landau u. E. M. Lifschitz, Hydrodynamik, Berlin 1966.

2. Einige Teilgebiete:
   A. Betz, Konforme Abbildung, 2. Aufl., Berlin-Göttingen-Heidelberg 1964.
   H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, Leipzig 1931.
   K. Oswatitsch, Gasdynamik, Wien 1952.
   H. W. Liepmann und A. Roshko, Elements of Gasdynamics, New York 1957.
   E. Becker, Gasdynamik, Stuttgart 1966. = Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik, Bd. 6.
   H. Schlichting, Grenzschichttheorie, 5. Aufl., Karlsruhe 1965.
   B. Thwaites (Editor), Incompressible Aerodynamics, Oxford 1960.
   J. O. Hinze, Turbulence, New York 1959.

Sachverzeichnis